

Problema 13 modificado

La idea de estas notas es extender algunos comentarios del ejercicio resuelto en clase. Este ejercicio es una variación del ejercicio 13 de la guía 2. A lo largo del apunte iré comentando el contraste con el problema original.

El problema pide calcular, en todo punto del espacio, el potencial eléctrico $\Phi(\mathbf{r})$ de un sistema formado por una esfera conductora a tierra, de radio a , rodeado por un anillo cargado, de radio b (sin espesor), ubicado en el ecuador de la esfera el cuál está cargado con una densidad lineal $\lambda(\varphi)$. Ver Figura (1).

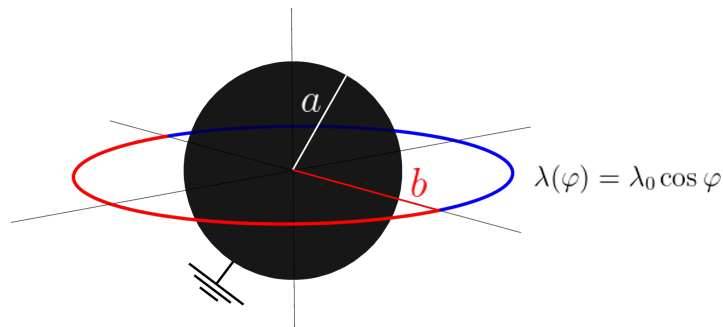


Figura 1: Dibujo del sistema.

La idea de la variación es poder observar algunas propiedades de los armónicos esféricos y cómo de ellos se obtienen cantidades físicas, y no solo obtener un potencial eléctrico más.

Empecemos escribiendo la densidad de carga $\rho(\mathbf{r})$. Sabemos que el anillo no tiene espesor y tiene radio b ; por lo que $\rho(\mathbf{r}) \sim \delta(r - b)$. Por otro lado, está en el ecuador ($z = 0$). Es decir que $\rho(\mathbf{r}) \sim \delta(z)$, pero en coordenadas esféricas, con $r = b$, es $z = b \cos \theta$. Por lo tanto

$$\rho(\mathbf{r}) \sim \delta(r - b)\delta(z) = \delta(r - b)\delta(b \cos \theta) = \delta(r - b)\frac{\delta(\cos \theta)}{b}. \quad (1)$$

Hasta ahora lo que hicimos fue simplemente localizar espacialmente el anillo. Para que sea una distribución de carga basta con decir que en el ángulo φ hay ubicada una cantidad $\lambda(\varphi)$ de densidad de carga. Finalmente es

$$\rho(\mathbf{r}) = \lambda(\varphi)\delta(r - b)\frac{\delta(\cos\theta)}{b}. \quad (2)$$

Si bien la forma de la distribución, en este caso un anillo, es demasiado específica; aún así $\lambda(\varphi)$ podría ser cualquier función de φ . Ya sea $\lambda(\varphi) = \lambda_0$; $\lambda(\varphi) = \lambda_0 \cos\varphi$; o la que se les ocurra.

Una vez determinada la distribución de carga, podemos calcular el potencial usando el teorema de Green. Conociendo la función de Green¹ de la esfera conductora (de radio a) el potencial eléctrico es

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (3)$$

Sabemos que la función de Green es

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a}{r'}\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{a^2}{r'^2}\mathbf{r}'|} = \Phi_q(\mathbf{r}) + \Phi_{im}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

donde entendemos que el término $\Phi_{im}(\mathbf{r})$ como el generado por una carga imagen de valor $-\frac{a}{r'}$ ubicada en $\mathbf{x} = \frac{a^2}{r'^2}\mathbf{r}'$. Como queremos usar coordenadas esféricas, necesitamos escribir estos potenciales Coulombianos en esta base, i.e. dado un punto $\mathbf{x} = (x = |\mathbf{x}|, \varphi', \theta')$ es

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (5)$$

con $r_{<} = \min\{r, x\}$, $r_{>} = \max\{r, x\}$.

Para obtener el término $\Phi_{im}(\mathbf{r})$, hay que usar $\mathbf{x} = \frac{a^2}{r'^2}\mathbf{r}'$, de manera que $x = \frac{a^2}{r'}$. Como la imagen está dentro de la esfera, es claro que

$$r_{>} = r, \quad r_{<} = x. \quad (6)$$

¹Con condiciones de contorno de Dirichlet. Quizás sirva recordar que la función de Green es la solución a la ecuación de Poisson para una fuente localizada $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$; en una dada región del espacio y quedando determinadas las condiciones del campo en el borde de dicha región (Dirichlet o Neumann). Es decir que la función de Green es independiente de la distribución específica que estemos estudiando. Es más una relación entre las ecuaciones que definen la teoría y la región del espacio donde esté definida. Para una teoría cuyos campos $F(\mathbf{x})$ deban satisfacer un dado operador diferencial $D[F(x)]$, se dice que $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ es la función de Green (de esta teoría), si $D[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. A veces también se suele llamar a G la *inversa* del operador D .

Reemplazando esto tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi_{im}(\mathbf{r}) &= -\frac{a}{r'} \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{a^2}{r'}\right)^l \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \\
&= -\sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{a^l}{r'^{l+1}} \frac{a^{l+1}}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \quad (7) \\
\Phi_{im}(\mathbf{r}) &= -\sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{a^l}{r_{>}^{l+1}} \frac{a^{l+1}}{r_{<}^{l+1}} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega)
\end{aligned}$$

Mientras que para obtener el término $\Phi_q(\mathbf{r})$ basta con tomar $\mathbf{x} = \mathbf{r}'$. De lo que obtenemos

$$\Phi_q(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{a^l}{r_{>}^{l+1}} \frac{r_{<}^l}{a^l} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \quad (8)$$

Finalmente, sumando (8) y (7) obtenemos la función de Green

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{a^l}{r_{>}^{l+1}} \left(\frac{r_{<}^l}{a^l} - \frac{a^{l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \quad (9)$$

En lo que sigue veremos que la dependencia radial no va a ser tan importante para calcular el potencial pues al integrarla con la densidad (2), la $\delta(r-b)$ lo único que hará será evaluar $r' = b$. Por lo que conviene simplemente definir

$$R_l(r_{<}, r_{>}) = \frac{a^l}{r_{>}^{l+1}} \left(\frac{r_{<}^l}{a^l} - \frac{a^{l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \quad (10)$$

Y reescribir la función de Green como

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} R_l(r_{<}, r_{>}) Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \quad (11)$$

Ahora sí, pasemos a calcular el potencial eléctrico del anillo.

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}) &= \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
&= \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} R_l(r_<, r_>) Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \\
&= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[\int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') R_l(r_<, r_>) Y_{lm}^*(\Omega') \right] Y_{lm}(\Omega) \\
&= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[\int_0^\infty dr' r'^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta') \int_0^{2\pi} \delta(r-b) \frac{\delta(\cos \theta)}{b} \lambda(\varphi) \right. \\
&\quad \left. R_l(r_<, r_>) Y_{lm}^*(\Omega') \right] Y_{lm}(\Omega)
\end{aligned}$$

Notemos que hasta el tercer renglón el problema viene siendo bastante general. El término entre corchetes es el coeficiente que hay que calcular para cualquier distribución $\rho(\mathbf{r})$ frente a la esfera conductora a tierra. Así mismo, si esta distribución colapsara en la esfera (i.e. $\rho(\mathbf{r}) = \delta(r-b)\sigma(\Omega)$) o simplemente factorizara su dependencia en las coordenadas (i.e. $\rho(\mathbf{r}) = f(r)\sigma(\Omega)$) el corchete del cuarto renglón sería

$$\int_0^\infty dr' r'^2 f(r') R_l(r_<, r_>) \int_{S^2} d^2\Omega' \sigma(\Omega') Y_{lm}^*(\Omega') \quad (12)$$

Entonces si la distribución además tuviera espesor radial, tendríamos que calcular el primer factor el cual ya no sería simplemente colapsar una delta.

Sigamos con la cuenta anterior. Evaluando las deltas tenemos

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[b R_l(r_<, r_>) \int_0^{2\pi} \lambda(\varphi) Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, \varphi' \right) \right] Y_{lm}(\Omega) \quad (13)$$

donde se redefinen $r_< = \min\{r, b\}$, $r_> = \max\{r, b\}$. Entonces la única integral que tenemos que hacer es la que está dentro del corchete, la que definimos como

$$A_{lm} = \int_0^{2\pi} \lambda(\varphi') Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, \varphi' \right) d\varphi' \quad (14)$$

Recordemos que los armónicos esféricos se definen como

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} = g_{lm}(\theta) e^{im\varphi} \quad (15)$$

donde $l = 0, 1, 2, \dots$, $-l \leq m \leq l$; y por comodidad definimos $g_{lm}(\theta)$ es una función real. Toda la parte compleja de los armónicos esféricos está en la fase $e^{im\varphi}$.

Podemos ver entonces que, para cada m ,

$$A_{lm} = g_{lm} \left(\frac{\pi}{2} \right) \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi'} \lambda(\varphi') d\varphi' \quad (16)$$

no es más que el coeficiente m -ésimo de la serie de Fourier² de $\lambda(\varphi)$. De manera que si la distribución es $\lambda(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ tenemos

$$\begin{aligned} A_{lm} &= \lambda_0 g_{lm} \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{i(1-m)\varphi'} + e^{-i(1+m)\varphi'} d\varphi' \\ A_{lm} &= 2\pi \lambda_0 g_{lm} \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

Es claro entonces que para el problema original, donde $\lambda(\varphi) = \lambda_0 = \lambda_0 e^{i0\varphi}$, la integral deviene en δ_{m0} . Por lo tanto los únicos armónicos esféricos que aparecen en la serie (13) son los

$$Y_{l0}(\Omega) = g_{l0}(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad (18)$$

Y los únicos A_{lm} no nulos son

$$A_{lm} = 2\pi \lambda_0 \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(0). \quad (19)$$

En realidad también se da, como dicen las *Fórmulas útiles* del ejercicios, que $P_l(0)$ se anula para los l impares; mientras que para los pares vale $P_l(0) = \frac{(-1)^{\frac{l}{2}} l!}{2^l (\frac{l}{2})!^2}$. Es decir que en (13) se suma solo sobre los l pares.

Volviendo, otra vez, al problema modificado; reemplazando los A_{lm} encontrados en (17) tenemos

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi \lambda_0 b}{2l+1} \frac{2\pi}{2} \left[g_{l1} \left(\frac{\pi}{2} \right) g_{l1}(\theta) e^{i\varphi} + g_{l-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) g_{l-1}(\theta) e^{-i\varphi} \right] R_l(r_<, r_>). \quad (20)$$

²En la base exponencial $\{e^{-im\varphi}\}$

Notemos la siguiente propiedad de los g_{lm} . Sabiendo que los armónicos esféricos cumplen que $Y_{l-m}(\Omega) = (-1)^m Y_{lm}(\Omega)^*$

$$\begin{aligned} g_{l-m}(\theta)e^{-im\varphi} &= (-1)^m g_{lm}(\theta)e^{-im\varphi} \\ g_{l-m}(\theta) &= (-1)^m g_{lm}(\theta) \end{aligned} \quad (21)$$

Con esto queda claro entonces que $g_{l-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)g_{l-1}(\theta) = g_{l1}\left(\frac{\pi}{2}\right)g_{l1}(\theta)$. La serie del potencial entonces se reduce a

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} 2\pi\lambda_0 b g_{l1}\left(\frac{\pi}{2}\right) g_{l1}(\theta) \cos\varphi R_l(r_<, r_>). \quad (22)$$

donde $g_{l1}(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-1)!}{(l+1)!}} P_l^1(x)$ y el polinomio de Legendre asociado $P_l^1(x) = -\sqrt{1-x^2} \frac{dP_l(x)}{dx}$.

Para poder seguir con el ejercicio es necesario dar como ayuda la recurrencia $\frac{1-x^2}{l} \frac{dP_l(x)}{dx} = P_{l-1}(x) - xP_l(x)$. De manera que

$$g_{l1}(\theta) = -\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-1)!}{(l+1)!}} \frac{l}{\sin\theta} [P_{l-1}(\cos\theta) - \cos\theta P_l(\cos\theta)], \quad (23)$$

y $g_{l1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-1)!}{(l+1)!}} l P_{l-1}(0)$. Como comentamos antes, este término es no nulo solo si $l-1$ es par, o sea, l impar. Finalmente, juntando todos los cachitos que fuimos calculando en el camino, obtenemos

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{l \\ (\text{impares})}} \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}} 2\pi\lambda_0 b}{2^l} \frac{l!}{\left(\frac{l+1}{2}\right)!} \frac{P_{l-1}(\cos\theta) - \cos\theta P_l(\cos\theta)}{\sin\theta} \cos\varphi R_l(r_<, r_>) \quad (24)$$

Es importante notar que al no aparecer $l=0$ este potencial no tiene término monopolar.

Si queremos ver el término dipolar, tomando $b \ll r$, tenemos que quedarnos con aquellos términos con $l=1$.

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= 2\pi\lambda_0 b \frac{1}{2} \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin\theta} \cos\varphi \frac{a}{r^2} \left(\frac{b}{a} - \frac{a^2}{b^2} \right) + \dots \\ \Phi(\mathbf{r}) &= (\pi\lambda_0 b) b \left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right) \frac{r \sin\theta \cos\varphi}{r^3} + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Sabemos que, en la expansión multipolar, el término dipolar es aquel que va como $\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$. Vemos entonces que si $\mathbf{r} = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ es necesario que $\mathbf{p} = p_x \hat{x}$. De manera que el momento dipolar es

$$\mathbf{p} = (\lambda_0 \pi b) b \left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right) \hat{x} \quad (26)$$

Este resultado era esperado pues el sistema original lo podemos pensar como el anillo y su imagen dentro de la esfera. Y también sabemos que las cargas dentro tiene un factor $-\frac{a}{r'}$ y está ubicadas en la mismo vector que la original con un factor $\frac{a^2}{r'^2}$ (en este caso es $r' = b$). Por lo que si el momento dipolar del anillo lo calculamos como

$$\mathbf{p}_{anillo} = \int_V d^3 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} = (\lambda_0 \pi b) b \hat{x} \quad (27)$$

entonces

$$\mathbf{p}_{im} = \int_V d^3 \mathbf{r} \rho_{im}(\mathbf{r}) \mathbf{r} = -\frac{a^3}{b^3} \int_V d^3 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} = -\frac{a^3}{b^3} \mathbf{p}_{anillo}. \quad (28)$$

Y por lo tanto el momento dipolar es $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{anillo} + \mathbf{p}_{im}$ como obtuvimos antes.

Finalmente para ver qué ocurre con el momento cuadrupolar necesitamos observar lo siguiente. Este término es aquel que va como $\frac{1}{r^5} \sum_{i,j} x_i (\bar{\mathbf{Q}})_{ij} x_j$ donde se define el tensor cuadrupolar como

$$(\bar{\mathbf{Q}})_{ij} = \int_V d^3 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (3(\mathbf{r})_i (\mathbf{r})_j - \delta_{ij} r^2). \quad (29)$$

Una característica importante de los armónicos esféricos³ es que todo monomio de grado l de las coordenadas de un vector \mathbf{x} en cartesianas, i.e. $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_l}$ se puede escribir como combinación de $r^l Y_{lm}$. Esto es precisamente lo que hicimos para obtener el término dipolar (con $l = 1$). Entonces, volviendo a la forma general del potencial (13) en $b \ll r$, es

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} b A_{lm} \frac{a^l}{r^{l+1}} \left(\frac{b^l}{a^l} - \frac{a^{l+1}}{b^{l+1}} \right) Y_{lm}(\Omega) \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} b A_{lm} \frac{b^l}{r^{2l+1}} \left(1 - \frac{a^{2l+1}}{b^{2l+1}} \right) r^l Y_{lm}(\Omega) \end{aligned} \quad (30)$$

³Que no tiene porque saber, pero ahora sabe

Queda claro entonces que el término cuadrupolar sale de l tal que $r^{2l+1} = r^5$, es decir $l = 2$. Pero sabemos que los términos con l par no aparecen en la serie, por lo tanto el momento cuadrupolar debe ser nulo. Y por lo mismo, todos los momentos de orden par también debe ser nulos.

Una generalización innecesaria.

A pesar de lo específico que pudo haber sido el problema (un anillo alrededor de una esfera conductora), vimos que la instancia más general del problema está al determinar los coeficientes (16). Al tomar una distribución de la forma $\cos \varphi$, los únicos m que aparecen son los $m = \pm 1$. Esto tuvo como consecuencia que el término monopolar sea nulo, pues $l = 0$ no tiene $m = 1$; y que por lo tanto el potencial arrancase recién en el término dipolar. Es claro entonces que si tomamos una distribución $\cos n\varphi$, de la integral obtendremos $\delta_{m,n} + \delta_{m,-n}$; es decir que solo aparecen los $m = \pm n$. Y por lo mismo, los coeficientes con $l \leq n - 1$ deben ser nulos pues para estos no existe $m = \pm n$. Entonces, en esta generalización el potencial arranca recién en el momento de orden n . Queda como ejercicio para el/la lector/a interpretar esto en términos de la distribución de cargas dentro del anillo.