

Primer parcial (Lunes 15/05/2023)

1. Un disco plano de radio a está cargado con una densidad de carga $\sigma(r) = \sigma_0 r$, siendo r la coordenada radial en cilíndricas (ver Fig. 1).
 - (a) Escriba la función de Green (libre) para una carga ubicada en (r', φ', z') . Expresé esta función en la base de las funciones de Bessel $J_\nu(kr)$, $N_\nu(kr)$.
 - (b) Obtenga el potencial ϕ del disco cargado para todo el espacio a partir de la función de Green.
 - (c) Calcule los momentos multipolares hasta el cuadrupolar inclusive.

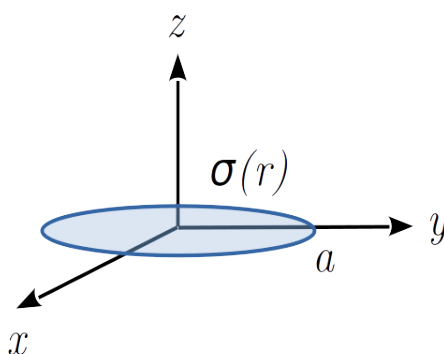


Fig. 1

Vamos a parametrizar el espacio en coordenadas cilíndricas (r, φ, z) donde r es la distancia al eje z ¹. Nos piden explícitamente que usemos las funciones de Bessel $J_\nu(kr)$ y $N_\nu(kr)$, las cuales forman base en la coordenada r .

Estamos estudiando una distribución de carga en el espacio no acotado; es decir que esta región contiene el eje $r = 0$ y sabemos que las funciones $N_\nu(kr)$ tienen una singularidad sobre ese eje, por lo que para calcular la función de Green debemos descartarla quedándonos únicamente con las funciones $J_\nu(kr)$.

Entonces buscamos expandir la función $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en la base² $\{J_\nu(kr)e^{i\nu\varphi}\}$. Es decir que vamos a hacer un corte en el plano z' , donde estará la carga puntual. Notaremos por I y II a las regiones superior e inferior de este plano respectivamente.

Sabemos que la función más general, en estas condiciones, que satisface la ecuación de Laplace es

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dk A_\nu(k) J_\nu(kr) e^{i\nu\varphi} (\alpha_{I/II} e^{-kz} + \beta_{I/II} e^{kz}),$$

donde ya usamos que ν debe ser un entero para garantizar la buena definición de la función en la variable φ , y $\alpha_{I/II}$ y $\beta_{I/II}$ son coeficientes que debemos determinar según z tome valores de la región I o II.

Sabemos que el potencial debe anularse en el infinito; por lo que para $z > z'$ (la región I) debe ser $\beta_I = 0$, y para $z < z'$ (la región II) debe ser $\alpha_{II} = 0$. Y para garantizar la continuidad basta con tomar $\alpha_I = A e^{kz'}$ y $\beta_{II} = A e^{-kz}$. Absorbiendo A en $A_\nu(k)$ tenemos

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dk A_\nu(k) J_\nu(kr) e^{i\nu\varphi} e^{-k|z-z'|}.$$

¹Lo que a veces también llamamos ρ .

²Como siempre, vamos a tener base en φ .

Finalmente, para determinar el coeficiente $A_\nu(k)$ debemos calcular el salto en la derivada en la superficie donde se ubica la fuente puntual, en este caso el plano $z = z'$. Es decir que buscamos resolver la ecuación

$$\partial_z G_D|_{z'-} - \partial_z G_D|_{z'+} = 4\pi\sigma(r, \varphi).$$

Es fácil calcular el lado izquierdo de la ecuación y obtener

$$\partial_z G_D|_{z'-} - \partial_z G_D|_{z'+} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dk 2k A_\nu(k) J_\nu(kr) e^{i\nu\varphi}.$$

Por otro lado, al ser una carga puntual ubicada en (r', φ', z') , sabemos que la densidad superficial en z' debe ser

$$\sigma(r, \varphi) = \frac{\delta(r - r')}{r} \delta(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dk k J_\nu(kr) J_\nu(kr') e^{i\nu(\varphi - \varphi')},$$

donde la expansión de la última identidad la obtenemos usando las ecuaciones (1) y (3) de las fórmulas útiles. De manera que tenemos que resolver

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dk 2k A_\nu(k) J_\nu(kr) e^{i\nu\varphi} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dk 2k J_\nu(kr') e^{-i\nu\varphi'} J_\nu(kr) e^{i\nu\varphi},$$

de donde simplemente despejamos $A_\nu(k) = J_\nu(kr') e^{-i\nu\varphi'}$. Finalmente, la función de Green del espacio no acotado es

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dk J_\nu(kr') e^{-i\nu\varphi'} J_\nu(kr) e^{i\nu\varphi} e^{-k|z-z'|}.$$

Una vez que tenemos la función de Green, obtener el potencial de una dada distribución $\rho(\mathbf{r}')$ simplemente será $\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Es claro que la distribución del problema es

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma_0 r \Theta(a - r) \delta(z).$$

Notemos que las unidades de σ_0 deben ser de carga sobre volumen.

Entonces, el potencial eléctrico es

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \int d^3\mathbf{r}' \sigma_0 r' \Theta(a - r') \delta(z') \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dk J_\nu(kr') e^{-i\nu\varphi'} J_\nu(kr) e^{i\nu\varphi} e^{-k|z-z'|} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dk \left\{ \int d^3\mathbf{r}' \sigma_0 r' \Theta(a - r') \delta(z') J_\nu(kr') e^{-i\nu\varphi'} e^{-k|z-z'|} \right\} J_\nu(kr) e^{i\nu\varphi} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dk \sigma_0 \left\{ \int_0^{+\infty} dr' r'^2 \Theta(a - r') J_\nu(kr') \int_0^{2\pi} d\varphi' e^{-i\nu\varphi'} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z') e^{-k|z-z'|} \right\} J_\nu(kr) e^{i\nu\varphi} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dk \sigma_0 \left\{ \int_0^{+\infty} dr' r'^2 \Theta(a - r') J_\nu(kr') 2\pi \delta_{\nu 0} e^{-k|z|} \right\} J_\nu(kr) e^{i\nu\varphi} \\ &= \int_0^{+\infty} dk 2\pi \sigma_0 \left\{ \int_0^a dr' r'^2 J_0(kr') \right\} J_0(kr) e^{-k|z|} \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \int_0^{+\infty} dk 2\pi \sigma_0 \left\{ \frac{1}{k^3} \int_0^{ka} dx x^2 J_0(x) \right\} J_0(kr) e^{-k|z|} \end{aligned}$$

La $\delta_{\nu 0}$ era totalmente esperable debido a la simetría ante rotación del disco, el potencial no podía depender de φ . Y la integral entre corchetes se resuelve con la ecuación (9) de las fórmulas útiles. Con esto, el potencial electrostático del disco es

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_0^{+\infty} dk \left\{ -\frac{4\pi\sigma_0 a^2}{k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{J_{2n+1}(ka)}{(2n-1)(2n+3)} \right\} J_0(kr) e^{-k|z|}.$$

Por último calculemos los momentos multipolares usando coordenadas esféricas. Para evitar confusión, llamaremos R a la distancia al origen³. De manera que $r = R \sin(\theta)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= \sigma_0 r \Theta(a-r) \delta(z) \\ &= \sigma_0 R \sin(\theta) \Theta(a-R) \delta(R \cos(\theta)) \\ &= \sigma_0 R \sin(\theta) \Theta(a-R) \frac{1}{R} \delta(\cos(\theta)) \\ \rho(\mathbf{r}) &= \sigma_0 \sin(\theta) \delta(\cos(\theta)) \Theta(a-R) \end{aligned}$$

Entonces, el momento multipolar q_{lm} es

$$\begin{aligned} q_{lm} &= \int_0^{\infty} \int_{S^2} R^2 dR d^2\Omega \sigma_0 \sin(\theta) \delta(\cos(\theta)) \Theta(a-R) R^l Y_{lm}^*(\Omega) \\ &= \sigma_0 \int_0^a dR R^{l+2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta d\varphi \sin(\theta) \delta(\cos(\theta)) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{-im\varphi} \\ q_{lm} &= \sigma_0 \frac{a^{l+3}}{l+3} 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(0) \delta_{m0}. \end{aligned}$$

Uno por uno hasta el orden cuadrupolar, usando la ecuación (4) de las fórmulas útiles, son

$$q_{00} = \frac{\sigma_0 a^3}{3} \sqrt{\pi}, \quad q_{1m} = 0, \quad q_{2m} = -\frac{\sigma_0 a^5}{2} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \delta_{m0}.$$

2. Se tiene una esfera de radio a con polarización permanente y uniforme \vec{P} colocada en el centro de un casquete conductor esférico de radio b conectado a tierra, como muestra la Fig. 2. El espacio entre los radios a y b se encuentra ocupado por un dieléctrico de permitividad ϵ .

- Determine el potencial producido en todo punto del espacio.
- Determine la carga total inducida en el conductor. Justifique.
- ¿Qué presión recibe el hemisferio superior del casquete conductor?

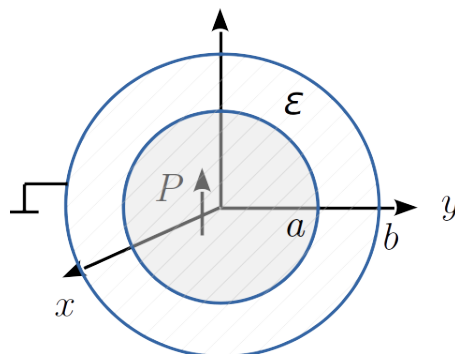


Fig. 2

³El r de esféricas.

Sabemos el campo eléctrico está generado siempre por una densidad de carga libre y una densidad de carga de polarización. En este caso no hay fuentes libres, por lo que las fuentes solo involucran a la polarización permanente $\mathbf{P} = p\hat{z}$ presente únicamente dentro de la esfera de radio a . Al ser uniforme tenemos que la densidad volumétrica $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$. Es decir que la fuente es únicamente superficial. Teniendo que fuera de la esfera la polarización es $\mathbf{P}_2 = 0$, la densidad superficial es

$$\sigma_P = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \hat{r} = (\mathbf{P} - 0) \cdot \hat{r} = p\hat{z} \cdot \hat{r} = pP_1(\cos(\theta)),$$

donde notamos que $\cos(\theta) = P_1(\cos(\theta))$ usando la ecuación (13) de las fórmulas útiles. Escribir así ayudará para cuando calculemos el salto en la derivada del potencial debido a esta fuente.

Empecemos proponiendo una solución para el potencial eléctrico usando separación de variables. Para simplificar la resolución tendremos en cuenta dos cosas. En primer lugar, de la simétrica del sistema respecto al eje \hat{z} , sabemos que el potencial no puede depender del ángulo azimutal φ , y por lo tanto en la expansión solo aparecerán los polinomios de Legendre y no los armónicos esféricos. Y en segundo lugar, debido a que tenemos una densidad de $r = a$, dividiremos el espacio según $r < a$ o $r > a$ notándolos como región I y II respectivamente. Con esto en mente proponemos una solución genérica como

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos(\theta)) \left(A_l^{I/II} r^l + \frac{B_l^{I/II}}{r^{l+1}} \right)$$

Dado que la región I contiene el origen en $r = 0$ es claro que para tener regularidad ahí debe ser $B_l^I = 0$ para todo l . Y por otro lado, el sistema está rodeado por un conductor a tierra en $r = b$; por lo que se tiene que cumplir

$$A_l^{II} b^l + \frac{B_l^{II}}{b^{l+1}} = 0 \rightarrow A_l^{II} = -\frac{B_l}{b^{2l+1}}.$$

De manera que el potencial es la función partida

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sum_l A_l r^l P_l(\cos(\theta)) & r < a \\ \sum_l \frac{B_l}{b^{l+1}} \left(\frac{b^{l+1}}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^l} \right) P_l(\cos(\theta)) & r > a \end{cases}$$

Lo siguiente que debemos imponer es la continuidad del potencial en $r = a$. La forma más sencilla de garantizar esto es definir los coeficientes de cada región como $A_l = \frac{C_l}{b^{l+1}} \left(\frac{b^{l+1}}{a^{l+1}} - \frac{a^l}{b^l} \right)$ y $B_l = C_l a^l$. Tomando como $r_< = \min\{r, a\}$ y $r_> = \max\{r, a\}$ podemos reducir la expresión del potencial a

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{r_<^l}{b^{l+1}} \left(\frac{b^{l+1}}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^l} \right) P_l(\cos(\theta))$$

Por último debemos determinar C_l . Para hacer eso usaremos el salto del desplazamiento eléctrico \mathbf{D} en $r = a$. Sabemos que dentro de la esfera de radio a es $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$; y como fuera de la esfera hay un medio dieléctrico, es $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$. Entonces, debido a la ausencia de fuentes libres, tenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{r} &= 0 \\ (\varepsilon\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 - 4\pi\mathbf{P}) \cdot \hat{r} &= 0 \\ (\varepsilon\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{r} &= 4\pi\mathbf{P} \cdot \hat{r} \\ (\partial_r \Phi|_{a^-} - \varepsilon \partial_r \Phi|_{a^+}) \cdot \hat{r} &= 4\pi\sigma_P \end{aligned}$$

Calculemos cada derivada por separado. Primero,

$$\begin{aligned} \partial_r \Phi|_{a^-} &= \sum_{l=0}^{\infty} C_l l \frac{a^{l-1}}{b^{l+1}} \left(\frac{b^{l+1}}{a^{l+1}} - \frac{a^l}{b^l} \right) P_l(\cos(\theta)) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{a^2} \frac{l}{b^{2l+1}} (b^{2l+1} - a^{2l+1}) P_l(\cos(\theta)). \end{aligned}$$

Segundo ⁴,

$$\begin{aligned}\partial_r \Phi|_{a^+} &= \sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{a^l}{b^{l+1}} \left(-(l+1) \frac{b^{l+1}}{a^{l+2}} - l \frac{a^{l-1}}{b^l} \right) P_l(\cos(\theta)) \\ &= - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{a^2} \frac{1}{b^{2l+1}} ((l+1)b^{2l+1} + la^{2l+1}) P_l(\cos(\theta)).\end{aligned}$$

De manera que

$$\partial_r \Phi|_{a^-} - \varepsilon \partial_r \Phi|_{a^+} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{a^2} \frac{1}{b^{2l+1}} ((\varepsilon(l+1) + 1)b^{2l+1} + (\varepsilon l - 1)a^{2l+1}) P_l(\cos(\theta))$$

Por último, para poder aprovechar más fácilmente la ortogonalidad de la base conviene escribir la densidad superficial como

$$4\pi\sigma_P = 4\pi p P_1(\cos(\theta)) = \sum_{l=0}^{\infty} 4\pi p \delta_{l1} P_l(\cos(\theta))$$

Igualando estas dos expresiones tenemos

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{a^2} \left((\varepsilon(l+1) + 1) + (\varepsilon l - 1) \frac{a^{2l+1}}{b^{2l+1}} \right) P_l(\cos(\theta)) = \sum_{l=0}^{\infty} 4\pi p \delta_{l1} P_l(\cos(\theta))$$

Como los P_l forman una base, los coeficientes en cada lado de la igualdad deben ser iguales para cada l . Despejamos

$$C_l = \frac{4\pi p a^2}{(2\varepsilon + 1) + (\varepsilon - 1) \frac{a^3}{b^3}} \delta_{l1}$$

Y finalmente, el potencial eléctrico es

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi p a^2}{(2\varepsilon + 1) + (\varepsilon - 1) \frac{a^3}{b^3}} \frac{r_{<}}{b^2} \left(\frac{b^2}{r_{>}^2} - \frac{r_{>}}{b} \right) \cos(\theta)$$

Para determinar la carga inducida, en principio, necesitamos conocer el campo eléctrico sobre conductor y calcular $\sigma_{\text{ind.}} = \mathbf{E}(r=b) \cdot \hat{r}$. Si bien no vamos a determinar así la carga, necesitamos el potencial en $r > a$ para después. Este es

$$\Phi(\mathbf{r}) = C \frac{a}{b^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - \frac{r}{b} \right) \cos(\theta) = C \frac{a}{r^2} \cos(\theta) - C \frac{a}{b^3} r \cos(\theta) = C \frac{a}{r^2} \cos(\theta) - C \frac{a}{b^3} z.$$

Pero es más fácil aún. Basta con recordar que la carga es el momento multipolar q_{00} . Y como el potencial solo tiene $l=1$, es $q_{00} = \boxed{Q_{\text{ind}} = 0}$. Sino, otra forma de pensarlo, es que fuera de la esfera de radio b no puede haber campo; por lo tanto las cargas sobre el conductor se acomodan para anular el potencial y por lo tanto los momentos de la densidad que se distribuye en $r=b$ deben compensar uno a uno los momentos de las fuentes internas ($r < b$). Y en particular la carga inducida compensará la carga de σ_P ; pero como σ_P se debe a la polarización permanente, la cual es neutra, entonces necesariamente la carga inducida sobre el conductor también debe ser neutra.

⁴Francia

Por último, para calcular la presión, necesitamos conocer el campo eléctrico para $r > a$ y particularmente en $r = b$. Derivando el potencial tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \\ &= \frac{aC}{b^3}\hat{z} - aC\left(-\frac{2}{r^3}\cos(\theta)\hat{r} + \frac{1}{r^3}\sin(\theta)\hat{\theta}\right) \\ &= \frac{aC}{b^3}\hat{z} + \frac{aC}{r^3}(2\cos(\theta)\hat{r} - (-\cos(\theta)\hat{r} + \hat{z})) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{aC}{b^3}\hat{z} + \frac{aC}{r^3}(3\cos(\theta)\hat{r} - \hat{z})\end{aligned}$$

Vemos entonces que en $r = b$, el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(r = b) = \frac{3aC}{b^3}\cos(\theta)\hat{r}.$$

Es esperable que sea radial porque el campo eléctrico debe ser normal a la superficie de un conductor. Con esto, el tensor de Maxwell sobre la superficie del conductor es

$$\mathbf{T} \cdot \hat{r} = \frac{1}{4\pi} \left[(\mathbf{E} \cdot \hat{r})\mathbf{E} - \frac{1}{2}|\mathbf{E}|^2\hat{r} \right] = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{3aC}{b^3} \right)^2 \cos(\theta)^2 \hat{r}.$$

De manera la fuerza que se imprime sobre el casquete superior es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \int_{\text{Hemis. sup.}} d^2\mathbf{r} \mathbf{T} \cdot \hat{r} \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{3aC}{b^3} \right)^2 b^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d(\cos(\theta)) \cos(\theta)^2 \hat{r} \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{3aC}{b^3} \right)^2 2\pi b^2 \frac{\cos(\theta)^3}{3} \Bigg|_{\cos\theta=0}^{\cos\theta=1} \hat{r} \\ \mathbf{F} &= \frac{1}{12} \left(\frac{3aC}{b^2} \right)^2 \hat{r}\end{aligned}$$

Y como el área del hemisferio superior es $2\pi b^2$, la presión es $P = \frac{|F|}{\text{área}} = \frac{1}{24\pi} \left(\frac{3aC}{b^3} \right)^2$.

3. Una imán permanente tiene sección cuadrada de lado a , y está retorcido cilíndricamente, a lo largo de un ángulo 2π . En la Fig. 3 se muestra un detalle del mismo y un corte transversal a sus extremos. La magnetización M del imán es uniforme y tiene dirección perpendicular a la sección del mismo (ver Fig. 3).

- (a) Obtenga los campos \mathbf{B} y \mathbf{H} dentro y fuera del imán.
- (b) Grafique aproximadamente las líneas de campo de \mathbf{B} y \mathbf{H} .
- (c) Determine cuánto vale el momento monopolar y dipolar.

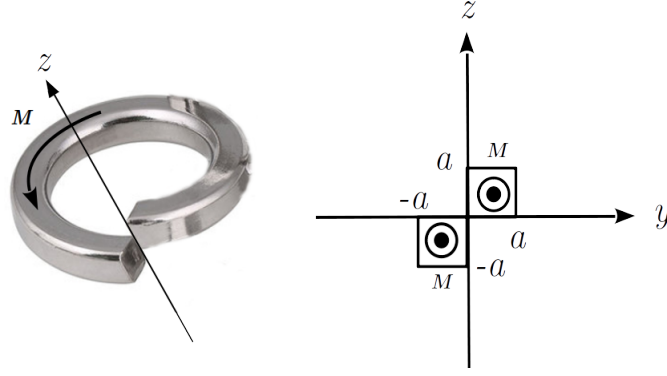


Fig. 3

Notamos en primer lugar que no hay corrientes libre. Por lo tanto el campo magnético es (menos) el gradiente de un potencial $\Phi(\mathbf{r})$ y, además, el sistema es equivalente a uno electrostático.

Sabemos que las fuentes de este potencial surgen de la magnetización \mathbf{M} del imán. Por un lado, la densidad en volumen se obtiene como $\rho_M = \nabla \cdot \mathbf{M}$, pero como \mathbf{M} es uniforme tenemos $\rho_M = 0$. Es decir que a lo sumo hay una densidad inducida sobre la superficie del imán. Por otro lado, nos dicen que \mathbf{M} es perpendicular a la sección del imán. Esto quiere decir que si la superficie del imán tiene normales \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 (una por cada cara a lo largo del anillo), \mathbf{M} es ortogonal a estas. Una idea de esto se muestra en Fig. 4(a).

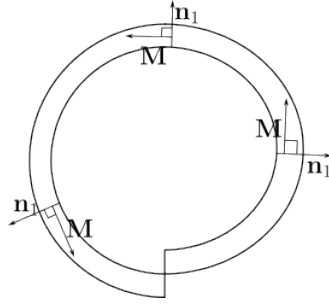


Fig. 4(a).

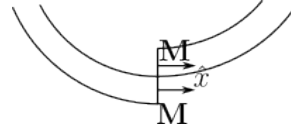


Fig. 4(b)

Es decir que alrededor del anillo no se induce carga. Por último tenemos que ver en las caras donde está "quebrado". Como muestra la Fig.3, en ambas caras es $\mathbf{M} = M_0\hat{x}$, paralelo a las normales de ambas superficies. Notaremos por I a la sección contenida en $0 \leq y, z \leq a$, y II $-a \leq y, z \leq 0$. Entonces, en la sección I, la normal es $-\hat{x}$ y $\mathbf{M} = M_0\hat{x}$; entonces $\sigma_I = \mathbf{M} \cdot \hat{n} = -M_0$. Como esta distribución es no nula únicamente dentro del cuadradito de lado a , la forma funcional de la distribución es

$$\sigma_I(y, z) = -M_0\Theta(y)\Theta(a-y)\Theta(z)\Theta(a-z),$$

donde $\Theta(x)$ es la función escalón⁵ Sin embargo no es necesario tener esta expresión siempre que recordemos que la distribución restringirá los intervalos de integración.

Análogamente, para la sección II, con normal \hat{x} , es

$$\sigma_{II}(y, z) = M_0\Theta(-y)\Theta(a+y)\Theta(-z)\Theta(a+z).$$

Dado que tenemos la distribución de carga en todo el espacio, integraremos la función de Green en coordenadas cartesianas. Y como la distribución está en el plano $x = 0$, necesitamos la que tiene la forma

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \int dk_y dk_z \frac{1}{2\pi k_x} e^{ik_z(z-z')} e^{ik_y(y-y')} e^{-k_x|x-x'|}.$$

⁵ $\Theta(x) = 1$ si $x > 0$ y $\theta(x) = 0$ para $x < 0$.

donde $k_x = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$. Es claro que cada densidad superficial me hará integrar \mathbf{r}' en cada cuadradito, es decir que voy a tener que hacer dos integrales. Llamo $\Phi_-(\mathbf{r})$ al potencial generado por el cuadradito de la sección I, y $\Phi_+(\mathbf{r})$ al generado por el cuadradito de la sección II. Antes de calcular nada notemos que si conociera el potencial de un cuadradito de lado a centrado en el origen con densidad uniforme M_0 , llamemoslo $\Phi_0(\mathbf{r})$; entonces Φ_+ es el potencial generado por ese cuadradito pero desplazado en la dirección $-\frac{a}{2}(\hat{x} + \hat{y})$. Es decir que $\Phi_+(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r} + \frac{a}{2}(\hat{x} + \hat{y}))$. Y por un razonamiento idéntico, es $\Phi_-(\mathbf{r}) = -\Phi_0(\mathbf{r} - \frac{a}{2}(\hat{x} + \hat{y}))$. Entonces, me basta con determinar $\Phi_0(\mathbf{r})$ para obtener

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_+(\mathbf{r}) + \Phi_-(\mathbf{r}) = \Phi_0\left(\mathbf{r} + \frac{a}{2}(\hat{y} + \hat{z})\right) - \Phi_0\left(\mathbf{r} - \frac{a}{2}(\hat{y} + \hat{z})\right)$$

Hagamos eso. $\Phi_0(\mathbf{r})$ es

$$\begin{aligned}\Phi_0(\mathbf{r}) &= M_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz' G_D(\mathbf{r}, y'\hat{y} + z'\hat{z}) \\ &= M_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz' \int \int dk_y dk_z \frac{1}{2\pi k_x} e^{ik_z(z-z')} e^{ik_y(y-y')} e^{-k_x|x|} \\ &= \frac{M_0}{2\pi} \int \int dk_y dk_z \frac{1}{k_x} e^{ik_z z} e^{ik_y y} e^{-k_x|x|} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy' e^{-ik_y y'} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz' e^{-ik_z z'} \\ &= \frac{M_0}{2\pi} \int \int dk_y dk_z \frac{1}{k_x} e^{ik_z z} e^{ik_y y} e^{-k_x|x|} \frac{e^{-i\frac{k_y a}{2}} - e^{i\frac{k_y a}{2}}}{-ik_y} \frac{e^{-i\frac{k_z a}{2}} - e^{i\frac{k_z a}{2}}}{-ik_z} \\ &= \frac{2M_0}{\pi} \int \int dk_y dk_z \frac{\sin(k_y a/2)}{k_y} e^{ik_y y} \frac{\sin(k_z a/2)}{k_z} e^{ik_z z} \frac{e^{-k_x|x|}}{k_x} \\ \Phi_0(\mathbf{r}) &= \frac{M_0 a^2}{2\pi} \int \int dk_y dk_z \text{sinc}(k_y a/2) e^{ik_y y} \text{sinc}(k_z a/2) e^{ik_z z} \frac{e^{-k_x|x|}}{k_x}\end{aligned}$$

donde definimos el seno cardinal $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Notar también que $\text{sinc}(x)$ es par, i.e. $\text{sinc}(-x) = \text{sinc}(x)$. Por lo tanto, haciendo el cambio de variable $k \rightarrow -k$ en cada integrando, $\Phi_0(\mathbf{r})$ también es

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \frac{\sigma a^2}{2\pi} \int \int dk_y dk_z \text{sinc}(k_y a/2) e^{-ik_y y} \text{sinc}(k_z a/2) e^{-ik_z z} \frac{e^{-k_x|x|}}{k_x}$$

Aprovecharemos esto fuertemente para poder escribir el potencial de la forma más compacta posible, y dejando en claro además que es un potencial real. Esto lo haremos escribiendo

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2}\Phi_0\left(\mathbf{r} + \frac{a}{2}(\hat{y} + \hat{z})\right) + \frac{1}{2}\Phi_0\left(\mathbf{r} + \frac{a}{2}(\hat{y} + \hat{z})\right) - \frac{1}{2}\Phi_0\left(\mathbf{r} - \frac{a}{2}(\hat{y} + \hat{z})\right) - \frac{1}{2}\Phi_0\left(\mathbf{r} - \frac{a}{2}(\hat{y} + \hat{z})\right) \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{\sigma a^2}{4\pi} \int \int dk_y dk_z \text{sinc}(k_y a/2) \text{sinc}(k_y a/2) \frac{e^{-k_x|x|}}{k_x} \\ &\quad \left[e^{ik_y(y+\frac{a}{2})} e^{ik_z(z+\frac{a}{2})} + e^{-ik_y(y+\frac{a}{2})} e^{-ik_z(z+\frac{a}{2})} - e^{ik_y(y-\frac{a}{2})} e^{ik_z(z-\frac{a}{2})} - e^{-ik_y(y-\frac{a}{2})} e^{-ik_z(z-\frac{a}{2})} \right]\end{aligned}$$

Veamos que los factores dentro del corchete se pueden reducir a una función real.

$$\begin{aligned}& e^{ik_y(y+\frac{a}{2})} e^{ik_z(z+\frac{a}{2})} - e^{ik_y(y-\frac{a}{2})} e^{ik_z(z-\frac{a}{2})} + e^{-ik_y(y+\frac{a}{2})} e^{-ik_z(z+\frac{a}{2})} - e^{-ik_y(y-\frac{a}{2})} e^{-ik_z(z-\frac{a}{2})} \\ &= e^{i(k_y y + k_z z)} \left(e^{i\frac{k_y a}{2}} e^{i\frac{k_z a}{2}} - e^{-i\frac{k_y a}{2}} e^{-i\frac{k_z a}{2}} \right) + e^{-i(k_y y + k_z z)} \left(e^{-i\frac{k_y a}{2}} e^{-i\frac{k_z a}{2}} - e^{i\frac{k_y a}{2}} e^{i\frac{k_z a}{2}} \right) \\ &= \left(e^{i(k_y y + k_z z)} - e^{-i(k_y y + k_z z)} \right) \left(e^{i\frac{(k_y + k_z) a}{2}} - e^{-i\frac{(k_y + k_z) a}{2}} \right) \\ &= -4 \frac{\left(e^{i(k_y y + k_z z)} - e^{-i(k_y y + k_z z)} \right)}{2i} \frac{\left(e^{i\frac{(k_y + k_z) a}{2}} - e^{-i\frac{(k_y + k_z) a}{2}} \right)}{2i} \\ &= -4 \sin(k_y y + k_z z) \sin\left(\frac{(k_y + k_z) a}{2}\right)\end{aligned}$$

Finalmente, el potencial es

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\sigma a^2}{\pi} \int \int dk_y dk_z \operatorname{sinc}\left(\frac{k_y a}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k_z a}{2}\right) \sin(k_y y + k_z z) \sin\left(\frac{(k_y + k_z)a}{2}\right) \frac{e^{-\sqrt{k_y^2 + k_z^2}|x|}}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}}$$

Teniendo el potencial, el campo magnético es $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = H_x(\mathbf{r})\hat{x} + H_y(\mathbf{r})\hat{y} + H_z(\mathbf{r})\hat{z}$. Estas componentes son

$$H_x(\mathbf{r}) = -\frac{\sigma a^2}{\pi} \operatorname{sign}(x) \int \int dk_y dk_z \operatorname{sinc}\left(\frac{k_y a}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k_z a}{2}\right) \sin(k_y y + k_z z) \sin\left(\frac{(k_y + k_z)a}{2}\right) e^{-\sqrt{k_y^2 + k_z^2}|x|}$$

$$H_y(\mathbf{r}) = \frac{\sigma a^2}{\pi} \int \int dk_y dk_z \operatorname{sinc}\left(\frac{k_y a}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k_z a}{2}\right) k_y \cos(k_y y + k_z z) \sin\left(\frac{(k_y + k_z)a}{2}\right) \frac{e^{-\sqrt{k_y^2 + k_z^2}|x|}}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}}$$

$$H_z(\mathbf{r}) = \frac{\sigma a^2}{\pi} \int \int dk_y dk_z \operatorname{sinc}\left(\frac{k_y a}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k_z a}{2}\right) k_z \cos(k_y y + k_z z) \sin\left(\frac{(k_y + k_z)a}{2}\right) \frac{e^{-\sqrt{k_y^2 + k_z^2}|x|}}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}) - 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \text{ dentro del imán} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \text{ fuera del imán} \end{cases}$$

Para graficar la líneas de \mathbf{H} bastaba con notar que las fuentes de campos eran dos distribuciones uniformes idénticas de signo contrario, y que a primer orden las líneas de campo son las de un dipolo. Al mismo tiempo daba una idea de hacia donde apuntaba \mathbf{m} . Y dada la forma poco clara de parametrizar \mathbf{M} , queda de lado ese gráfico⁶.

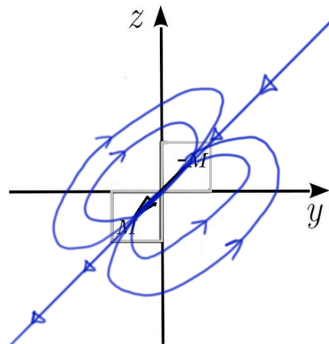


Gráfico aproximado del campo \mathbf{H} .

Sabemos que el campo magnético no tiene término monopolar. En principio basta con decir que el momento monopolar es nulo, pero incluso podemos calcularlo. Este va a estar asociado a la densidad de carga eléctrica equivalente, la cual para ser consistente debe ser neutra. Y esto en efecto ocurre. Cada cuadradito tiene inducido M_0 y $-M_0$ en un área a^2 idéntica; entonces $Q = M_0 a^2 - M_0 a^2 = 0$. Por último, el momento dipolar lo obtendremos de la densidad $\sigma(y, z) = \sigma_I(y, z) + \sigma_{II}(y, z)$. Por la simetría del problema es claro que $m_x = 0$. Calculemos otra, por ejemplo m_z .

$$m_z = \int_{-a}^a dy \int_{-a}^a dz \sigma(y, z) z = \int_{-a}^0 dy \int_{-a}^0 dz M_0 z - \int_0^a dy \int_0^a dz M_0 z = M_0 a \left(\frac{z^2}{2} \Big|_{-a}^0 - \frac{z^2}{2} \Big|_0^a \right) = -M_0 a^3.$$

Análogamente podemos calcular m_y , para obtener $\mathbf{m} = -M_0 a^3 (\hat{y} + \hat{z})$.

⁶ Algo aclarado durante el parcial.

Fórmulas útiles

$$\frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') = \int_0^{\infty} k J_{\nu}(k\rho) J_{\nu}(k\rho') dk \quad (1)$$

$$\frac{1}{k} \delta(k - k') = \int_0^{\infty} \rho J_{\nu}(k\rho) J_{\nu}(k'\rho) d\rho \quad (2)$$

$$\delta(\phi - \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu} e^{i\nu(\phi - \phi')} \quad (3)$$

$$P_l(0) = \begin{cases} 0 & l \text{ impar} \\ \frac{(-1)^{\frac{l}{2}} (l-1)!!}{2^{\frac{l}{2}} \frac{l}{2}!} & l \text{ par} \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_0^a J_0(x) dx = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} J_{2k+1}(a) \quad (5)$$

$$\int_0^a J_1(x) dx = 1 - J_0(a) \quad (6)$$

$$\int_0^a x J_0(x) dx = a J_1(a) \quad (7)$$

$$\int_0^a x^2 J_1(x) dx = a^2 J_2(a) \quad (8)$$

$$\int_0^a x^2 J_0(x) dx = -2a^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{J_{2k+1}(a)}{(2k-1)(2k+3)} \quad (9)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x-x')} = \delta(x-x') \quad (10)$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-\nu')\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{\nu\nu'} \quad (11)$$

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (12)$$

$$P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x \quad , \quad P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \quad (13)$$

$$\int_{-a}^a \cos(n\pi x/a) \cos(m\pi x/a) dx = a \delta_{nm} \quad (2a \text{ si } n = m = 0) \quad (14)$$

$$\int_{-a}^a \text{sen}(n\pi x/a) \text{sen}(m\pi x/a) dx = a \delta_{nm} \quad (15)$$

$$\int_0^a \cos(n\pi x/a) \cos(m\pi x/a) dx = \frac{a}{2} \delta_{nm} \quad (a \text{ si } n = m = 0) \quad (16)$$

$$\int_0^a \text{sen}(n\pi x/a) \text{sen}(m\pi x/a) dx = \frac{a}{2} \delta_{nm} \quad (17)$$