Física Teórica 1 - Práctica

Integración directa y superposición.

Integración directa y superposición.

- Integración directa
- Problema 4
- Superposición
- Problema 6
- Problema 8

Integración directa

En ausencia de contornos podemos calcular los campos por integración directa como

Integral de Poisson

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r'\rho(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S d^2r'\sigma(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{C}} dl'\lambda(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbb{R}\mathbf{E}(\mathbb{R}^{-1}\mathbf{r})$$

Integración directa

En ausencia de contornos podemos calcular los campos por integración directa como

Integral de Poisson

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r'\rho(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S d^2r'\sigma(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{C}} dl'\lambda(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbb{R}\mathbf{E}(\mathbb{R}^{-1}\mathbf{r})$$

Ley de Biot-Savart

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int_V d^3r'\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

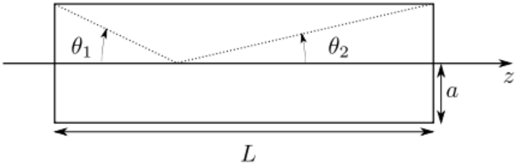
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int_S d^2r'\kappa(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\oint_{\mathcal{C}} I\mathbf{dl}' \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \det(\mathbb{R})\ \mathbb{R}\mathbf{B}(\mathbb{R}^{-1}\mathbf{r})$$

Problema 4

Ejercicio 4: Un solenoide de sección circular tiene largo L, radio a, n vueltas por unidad de longitud y corriente I.



1. Demostrar que el campo magnético a lo largo del eje es:

$$\mathbf{B} = \frac{2\pi n I}{c}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\,\hat{z},$$

donde θ_1 y θ_2 se muestran en la figura y el eje z coincide con el eje del solenoide. Considerar el límite en que $L \to \infty$ y comparar con el resultado del problema (2.f).

Problema 4

Vamos a calcular el campo por integración directa como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_S d^2 r' \kappa(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Problema 4

Vamos a calcular el campo por integración directa como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int_S d^2r'\kappa(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}.$$

Para ello usaremos coordenadas cilíndricas con el origen en el medio del cilindro.

Problema 4

Vamos a calcular el campo por integración directa como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int_S d^2r'\kappa(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}.$$

Para ello usaremos coordenadas cilíndricas con el origen en el medio del cilindro. Sabiendo que la densidad de vueltas es $n = \frac{N}{L}$, la densidad de corriente superficial vendrá dada por

$$\kappa(\mathbf{r}) = \hat{\varphi} n I \theta(L/2 - |z|).$$

Problema 4

La integral de superficie se escribe como

$$\int_S d^2r' \to \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L/2}^{L/2} dz'$$

Problema 4

La integral de superficie se escribe como

$$\int_S d^2r' \to \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L/2}^{L/2} dz'$$

La superficie sobre la que integramos es el cilindro que lo podemos parametrizar como

$$\mathbf{r}'(\varphi', z') = a\hat{\rho}(\varphi') + z'\hat{z}$$

Problema 4

La integral de superficie se escribe como

$$\int_S d^2r' \to \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L/2}^{L/2} dz'$$

La superficie sobre la que integramos es el cilindro que lo podemos parametrizar como

$$\mathbf{r}'(\varphi', z') = a\hat{\rho}(\varphi') + z'\hat{z}$$

Así como el punto de observación que nos interesa es el eje del cilindro $\mathbf{r} = z\hat{z}$ tenemos

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$$

Problema 4

La integral de superficie se escribe como

$$\int_S d^2r' \to \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L/2}^{L/2} dz'$$

La superficie sobre la que integramos es el cilindro que lo podemos parametrizar como

$$\mathbf{r}'(\varphi', z') = a\hat{\rho}(\varphi') + z'\hat{z}$$

Así como el punto de observación que nos interesa es el eje del cilindro $\mathbf{r} = z\hat{z}$ tenemos

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$$

Y ya podemos calcular el integrando

$$\kappa(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = nI\hat{\varphi} \times [(z - z')\hat{z} - a\hat{\rho}] = nI\,[(z - z')\hat{\rho} + a\hat{z}]\,\theta(|z - L/2|)$$

Problema 4

La integral de superficie se escribe como

$$\int_S d^2r' \to \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L/2}^{L/2} dz'$$

La superficie sobre la que integramos es el cilindro que lo podemos parametrizar como

$$\mathbf{r}'(\varphi', z') = a\hat{\rho}(\varphi') + z'\hat{z}$$

Así como el punto de observación que nos interesa es el eje del cilindro $\mathbf{r} = z\hat{z}$ tenemos

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$$

Y ya podemos calcular el integrando

$$\kappa(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = nI\hat{\varphi} \times [(z - z')\hat{z} - a\hat{\rho}] = nI\,[(z - z')\hat{\rho} + a\hat{z}]\,\theta(|z - L/2|)$$

Notemos que esto ya nos dice que el campo no tiene componente en $\hat{\varphi}$.

Problema 4

La integral de superficie se escribe como

$$\int_S d^2r' \to \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L/2}^{L/2} dz'$$

La superficie sobre la que integramos es el cilindro que lo podemos parametrizar como

$$\mathbf{r}'(\varphi', z') = a\hat{\rho}(\varphi') + z'\hat{z}$$

Así como el punto de observación que nos interesa es el eje del cilindro $\mathbf{r} = z\hat{z}$ tenemos

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$$

Y ya podemos calcular el integrando

$$\kappa(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = nI\hat{\varphi} \times [(z - z')\hat{z} - a\hat{\rho}] = nI\,[(z - z')\hat{\rho} + a\hat{z}]\,\theta(|z - L/2|)$$

Notemos que esto ya nos dice que el campo no tiene componente en $\hat{\varphi}$. (También podríamos haber usado la densidad de corriente $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \hat{\varphi}\frac{nI}{a}\delta(r - a)\theta(|z - L/2|)$)

Problema 4

Juntando los resultados anteriores tenemos

$$B_z(0,0,z) = \frac{nIa^2}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{1}{\left[(z-z')^2 + a^2\right]^{3/2}}.$$

Problema 4

Juntando los resultados anteriores tenemos

$$B_z(0,0,z) = \frac{nIa^2}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{1}{\left[(z-z')^2 + a^2\right]^{3/2}}.$$

La integral se puede calcular como

$$\int dz' \frac{1}{\left[(z-z')^2 + a^2\right]^{3/2}} = \frac{z'-z}{a^2 \left[(z-z')^2 + a^2\right]^{1/2}}.$$

Problema 4

Juntando los resultados anteriores tenemos

$$B_z(0,0,z) = \frac{nIa^2}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{1}{\left[(z-z')^2 + a^2\right]^{3/2}}.$$

La integral se puede calcular como

$$\int dz' \frac{1}{\left[(z-z')^2 + a^2\right]^{3/2}} = \frac{z'-z}{a^2 \left[(z-z')^2 + a^2\right]^{1/2}}.$$

Reemplazando obtenemos el campo magnético

$$B_z(0,0,z) = \frac{nIa^2}{c} 2\pi \frac{1}{a^2} \left[\frac{L/2 - z}{\sqrt{(L/2-z)^2 + a^2}} + \frac{L/2 + z}{\sqrt{(L/2+z)^2 + a^2}} \right]$$

Problema 4

Juntando los resultados anteriores tenemos

$$B_z(0,0,z) = \frac{nIa^2}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{1}{\left[(z-z')^2 + a^2\right]^{3/2}}.$$

La integral se puede calcular como

$$\int dz' \frac{1}{\left[(z-z')^2 + a^2\right]^{3/2}} = \frac{z'-z}{a^2 \left[(z-z')^2 + a^2\right]^{1/2}}.$$

Reemplazando obtenemos el campo magnético

$$B_z(0,0,z) = \frac{nIa^2}{c} 2\pi \frac{1}{a^2} \left[\frac{L/2 - z}{\sqrt{(L/2-z)^2 + a^2}} + \frac{L/2 + z}{\sqrt{(L/2+z)^2 + a^2}} \right]$$

$$B_z(0,0,z) = \frac{2\pi nI}{c} \left[\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right]$$

Problema 4

Juntando los resultados anteriores tenemos

$$B_z(0,0,z) = \frac{nIa^2}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{1}{\left[(z-z')^2 + a^2\right]^{3/2}}.$$

La integral se puede calcular como

$$\int dz' \frac{1}{\left[(z-z')^2 + a^2\right]^{3/2}} = \frac{z'-z}{a^2\left[(z-z')^2 + a^2\right]^{1/2}}.$$

Reemplazando obtenemos el campo magnético

$$B_z(0,0,z) = \frac{nIa^2}{c} 2\pi \frac{1}{a^2} \left[\frac{L/2 - z}{\sqrt{(L/2-z)^2 + a^2}} + \frac{L/2 + z}{\sqrt{(L/2+z)^2 + a^2}} \right]$$

$$B_z(0,0,z) = \frac{2\pi nI}{c} \left[\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right]$$

Tomando el límite del cilindro infinito recuperamos el resultado

$$B_z(0,0,z) \longrightarrow_{L\to\infty} \frac{4\pi nI}{c}.$$

Problema 4

2. Si el solenoide es largo ($a \ll L$), demostrar que la componente radial del campo magnético es
$$B_\rho \approx \frac{96\pi n I}{c}\left(\frac{a^2 z\rho}{L^4}\right),$$
válida hasta segundo orden en a/L para puntos cercanos al centro del solenoide ($z \ll L$, $\rho \ll a$). En esta expresión el origen de coordenadas coincide con el centro geométrico del solenoide.

Problema 4

Vamos a calcular el límite del campo cerca del eje, para lo cual podemos expandir al campo como

$$B_\rho(\rho, z) = a_0 + a_\rho \rho + a_z z + a_{\rho\rho}\rho^2 + a_{zz}z^2 + a_{\rho z}\rho z + ...$$

$$B_z(\rho, z) = b_0 + b_\rho \rho + b_z z + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz}z^2 + b_{\rho z}\rho z + ...$$

Problema 4

Vamos a calcular el límite del campo cerca del eje, para lo cual podemos expandir al campo como

$$B_\rho(\rho, z) = a_0 + a_\rho \rho + a_z z + a_{\rho\rho}\rho^2 + a_{zz}z^2 + a_{\rho z}\rho z + ...$$

$$B_z(\rho, z) = b_0 + b_\rho \rho + b_z z + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz}z^2 + b_{\rho z}\rho z + ...$$

Podemos usar las simetrías para encontrar algunos coeficientes.

Problema 4

Vamos a calcular el límite del campo cerca del eje, para lo cual podemos expandir al campo como

$$B_\rho(\rho, z) = a_0 + a_\rho \rho + a_z z + a_{\rho\rho}\rho^2 + a_{zz} z^2 + a_{\rho z}\rho z + ...$$

$$B_z(\rho, z) = b_0 + b_\rho \rho + b_z z + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz} z^2 + b_{\rho z}\rho z + ...$$

Podemos usar las simetrías para encontrar algunos coeficientes.

Reflejar respecto de $z = 0$ es una simetría de la corriente, entonces tenemos $\mathbf{B}(\rho, z) = -R_z \mathbf{B}(\rho, -z) = -R_z(B_z, B_\rho, B_\varphi)(\rho, -z) = (B_z, -B_\rho, -B_\varphi)(\rho, -z)$.

Problema 4

Vamos a calcular el límite del campo cerca del eje, para lo cual podemos expandir al campo como

$$B_\rho(\rho, z) = a_0 + a_\rho \rho + a_z z + a_{\rho\rho}\rho^2 + a_{zz}z^2 + a_{\rho z}\rho z + ...$$

$$B_z(\rho, z) = b_0 + b_\rho \rho + b_z z + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz}z^2 + b_{\rho z}\rho z + ...$$

Podemos usar las simetrías para encontrar algunos coeficientes.

Reflejar respecto de $z = 0$ es una simetría de la corriente, entonces tenemos $\mathbf{B}(\rho, z) = -R_z\mathbf{B}(\rho, -z) = -R_z(B_z, B_\rho, B_\varphi)(\rho, -z) = (B_z, -B_\rho, -B_\varphi)(\rho, -z)$.

En particular $B_\rho(\rho, z) = -B_\rho(\rho, -z) \implies a_0 = a_\rho = a_{\rho\rho} = a_{zz} = 0$

Problema 4

Además tenemos

$$B_z(\rho, z) = B_z(\rho, -z) \implies b_z = b_{\rho z} = 0.$$

Problema 4

Además tenemos

$$B_z(\rho, z) = B_z(\rho, -z) \implies b_z = b_{\rho z} = 0.$$

Ya vimos además que $B_\rho(0, 0, z) = 0$

$$\implies B_\rho(\rho = 0, z) = a_z z = 0 \implies a_z = 0$$

Problema 4

Además tenemos

$$B_z(\rho, z) = B_z(\rho, -z) \implies b_z = b_{\rho z} = 0.$$

Ya vimos además que $B_\rho(0, 0, z) = 0$

$$\implies B_\rho(\rho = 0, z) = a_z z = 0 \implies a_z = 0$$

Nos queda

$$B_\rho(\rho, z) = a_{\rho z}\rho z + ...$$

$$B_z(\rho, z) = b_0 + b_\rho \rho + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz}z^2 + ...$$

Problema 4

Además tenemos

$$B_z(\rho, z) = B_z(\rho, -z) \implies b_z = b_{\rho z} = 0.$$

Ya vimos además que $B_\rho(0, 0, z) = 0$

$$\implies B_\rho(\rho = 0, z) = a_z z = 0 \implies a_z = 0$$

Nos queda

$$B_\rho(\rho, z) = a_{\rho z}\rho z + ...$$

$$B_z(\rho, z) = b_0 + b_\rho \rho + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz}z^2 + ...$$

Usando la divergencia tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\rho) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Problema 4

Además tenemos

$$B_z(\rho, z) = B_z(\rho, -z) \implies b_z = b_{\rho z} = 0.$$

Ya vimos además que $B_\rho(0,0,z) = 0$

$$\implies B_\rho(\rho = 0, z) = a_z z = 0 \implies a_z = 0$$

Nos queda

$$B_\rho(\rho, z) = a_{\rho z}\rho z + ...$$

$$B_z(\rho, z) = b_0 + b_\rho \rho + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz}z^2 + ...$$

Usando la divergencia tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\rho) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_{\rho z}\rho z) + \frac{\partial}{\partial z}(b_0 + b_\rho \rho + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz}z^2) = 0$$

Problema 4

Además tenemos

$$B_z(\rho, z) = B_z(\rho, -z) \implies b_z = b_{\rho z} = 0.$$

Ya vimos además que $B_\rho(0, 0, z) = 0$

$$\implies B_\rho(\rho = 0, z) = a_z z = 0 \implies a_z = 0$$

Nos queda

$$B_\rho(\rho, z) = a_{\rho z}\rho z + ...$$

$$B_z(\rho, z) = b_0 + b_\rho \rho + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz}z^2 + ...$$

Usando la divergencia tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\rho) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_{\rho z}\rho z) + \frac{\partial}{\partial z}(b_0 + b_\rho \rho + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz}z^2) = 0$$

$$2a_{\rho z}z + 2b_{zz}z = 0 \implies a_{\rho z} = -b_{zz}$$

Problema 4

Además usando

$$0 = [\nabla \times \mathbf{B}]_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} B_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} B_z$$

Problema 4

Además usando

$$0 = [\nabla \times \mathbf{B}]_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} B_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} B_z$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}(a_{\rho z}\rho z + ...) - \frac{\partial}{\partial \rho}(b_0 + b_\rho \rho + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz}z^2)$$

Problema 4

Además usando

$$0 = [\nabla \times \mathbf{B}]_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} B_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} B_z$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}(a_{\rho z}\rho z + ...) - \frac{\partial}{\partial \rho}(b_0 + b_\rho \rho + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz}z^2)$$

$$0 = a_{\rho z}\rho - (b_\rho + 2b_{\rho\rho}\rho)$$

Problema 4

Además usando

$$0 = [\nabla \times \mathbf{B}]_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} B_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} B_z$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}(a_{\rho z}\rho z + ...) - \frac{\partial}{\partial \rho}(b_0 + b_\rho \rho + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz}z^2)$$

$$0 = a_{\rho z}\rho - (b_\rho + 2b_{\rho\rho}\rho)$$

$$\implies a_{\rho z} = 2b_{\rho\rho}, \quad b_\rho = 0$$

Problema 4

Además usando

$$0 = [\nabla \times \mathbf{B}]_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} B_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} B_z$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}(a_{\rho z}\rho z + ...) - \frac{\partial}{\partial \rho}(b_0 + b_\rho \rho + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz}z^2)$$

$$0 = a_{\rho z}\rho - (b_\rho + 2b_{\rho\rho}\rho)$$

$$\implies a_{\rho z} = 2b_{\rho\rho}, \quad b_\rho = 0$$

Juntando todos estos resultados tenemos

$$B_\rho(\rho, z) = -b_{zz}\rho z + ...$$

$$B_z(\rho, z) = b_0 - \frac{1}{2}b_{zz}\rho^2 + b_{zz}z^2 + ...$$

Problema 4

Notemos que lo que el ejercicio nos pide es justamente el coeficiente b_{zz} que es el coeficiente de orden 2 en la expansión de Taylor de $B_z(\rho = 0, z)$ pero ya conocemos esta función. Podemos calcularlo como

$$b_{zz} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} B_z|_{\rho=z=0} = -\frac{\pi n I}{c}\frac{3a^2 L}{(L^2/4 + a^2)^{5/2}}$$

Problema 4

Notemos que lo que el ejercicio nos pide es justamente el coeficiente b_{zz} que es el coeficiente de orden 2 en la expansión de Taylor de $B_z(\rho = 0, z)$ pero ya conocemos esta función. Podemos calcularlo como

$$b_{zz} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}B_z|_{\rho=z=0} = -\frac{\pi n I}{c}\frac{3a^2 L}{(L^2/4 + a^2)^{5/2}}$$

Entonces el campo cerca del origen es

$$B_\rho(\rho, z) \approx \frac{\pi n I \rho z}{c}\frac{3a^2 L}{(L^2/4 + a^2)^{5/2}}.$$

Problema 4

Notemos que lo que el ejercicio nos pide es justamente el coeficiente b_{zz} que es el coeficiente de orden 2 en la expansión de Taylor de $B_z(\rho = 0, z)$ pero ya conocemos esta función. Podemos calcularlo como

$$b_{zz} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} B_z|_{\rho=z=0} = -\frac{\pi n I}{c}\frac{3a^2 L}{(L^2/4 + a^2)^{5/2}}$$

Entonces el campo cerca del origen es

$$B_\rho(\rho, z) \approx \frac{\pi n I \rho z}{c}\frac{3a^2 L}{(L^2/4 + a^2)^{5/2}}.$$

si además consideramos un solenoide largo $a \ll L$ tenemos

$$B_\rho(\rho, z) \approx \frac{96\pi n I}{c}\left(\frac{a^2 \rho z}{L^4}\right).$$

Superposición

Ecuación de Poisson

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi(\mathbf{x}) &= -4\pi\rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in B \\ \Phi|_{\partial B} &= f \end{aligned}$$

Tiene solución y es única.

Superposición

Ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B$$
$$\Phi|_{\partial B} = f$$

Tiene solución y es única.

$$\nabla^2\Phi_1 = -4\pi\rho_1, \quad \Phi|_{\partial B} = f_1$$
$$\nabla^2\Phi_2 = -4\pi\rho_2, \quad \Phi|_{\partial B} = f_2$$

Superposición

Ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in B$$
$$\Phi|_{\partial B} = f$$

Tiene solución y es única.

$$\nabla^2\Phi_1 = -4\pi\rho_1, \quad \Phi|_{\partial B} = f_1$$
$$\nabla^2\Phi_2 = -4\pi\rho_2, \quad \Phi|_{\partial B} = f_2$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$
$$f = f_1 + f_2$$

Superposición

Ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B$$
$$\Phi|_{\partial B} = f$$

$$\implies \nabla^2\Phi_1 + \nabla^2\Phi_2 = -4\pi\rho_1 - 4\pi\rho_2$$
$$\nabla^2\left(\Phi_1 + \Phi_2\right) = -4\pi\left(\rho_1 + \rho_2\right) = -4\pi\rho$$

Tiene solución y es única.

$$\nabla^2\Phi_1 = -4\pi\rho_1, \quad \Phi|_{\partial B} = f_1$$
$$\nabla^2\Phi_2 = -4\pi\rho_2, \quad \Phi|_{\partial B} = f_2$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$
$$f = f_1 + f_2$$

Superposición

Ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B$$
$$\Phi|_{\partial B} = f$$

Tiene solución y es única.

$$\nabla^2\Phi_1 = -4\pi\rho_1, \quad \Phi|_{\partial B} = f_1$$
$$\nabla^2\Phi_2 = -4\pi\rho_2, \quad \Phi|_{\partial B} = f_2$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$
$$f = f_1 + f_2$$

$$\implies \nabla^2\Phi_1 + \nabla^2\Phi_2 = -4\pi\rho_1 - 4\pi\rho_2$$
$$\nabla^2\left(\Phi_1 + \Phi_2\right) = -4\pi\left(\rho_1 + \rho_2\right) = -4\pi\rho$$

Tomando

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

se satisface Poisson

Superposición

Ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in B$$
$$\Phi|_{\partial B} = f$$

Tiene solución y es única.

$$\nabla^2\Phi_1 = -4\pi\rho_1, \quad \Phi|_{\partial B} = f_1$$
$$\nabla^2\Phi_2 = -4\pi\rho_2, \quad \Phi|_{\partial B} = f_2$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$
$$f = f_1 + f_2$$

$$\implies \nabla^2\Phi_1 + \nabla^2\Phi_2 = -4\pi\rho_1 - 4\pi\rho_2$$
$$\nabla^2\left(\Phi_1 + \Phi_2\right) = -4\pi\left(\rho_1 + \rho_2\right) = -4\pi\rho$$

Tomando

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

se satisface Poisson y se satisface la condición de contorno

$$\Phi|_{\partial B} = \Phi_1|_{\partial B} + \Phi_2|_{\partial B} = f_1 + f_2 = f,$$

es decir, Φ es la (única) solución.

Ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in B$$
$$\Phi|_{\partial B} = f$$

Tiene solución y es única.

$$\nabla^2\Phi_1 = -4\pi\rho_1, \quad \Phi|_{\partial B} = f_1$$
$$\nabla^2\Phi_2 = -4\pi\rho_2, \quad \Phi|_{\partial B} = f_2$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$
$$f = f_1 + f_2$$

$$\implies \nabla^2\Phi_1 + \nabla^2\Phi_2 = -4\pi\rho_1 - 4\pi\rho_2$$
$$\nabla^2\left(\Phi_1 + \Phi_2\right) = -4\pi\left(\rho_1 + \rho_2\right) = -4\pi\rho$$

Tomando

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

se satisface Poisson y se satisface la condición de contorno

$$\Phi|_{\partial B} = \Phi_1|_{\partial B} + \Phi_2|_{\partial B} = f_1 + f_2 = f,$$

es decir, Φ es la (única) solución. Además

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\nabla\Phi_1 - \nabla\Phi_2 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

Lo mismo vale cambiando Φ por $\vec{A}$ y ρ por $\vec{j}$.

Problema 6

Ejercicio 6: Un cilindro infinito de radio a tiene una densidad uniforme de carga, salvo a lo largo de una cavidad cilíndrica de radio b, que corre paralela al eje del cilindro. El eje de la cavidad está a una distancia d del eje del cilindro, tal que $d + b < a$.

1. Calcular el campo eléctrico dentro de la cavidad.
2. Si en lugar de tener una densidad de carga uniforme, el cilindro transportase una corriente uniforme paralela a su eje, calcular el campo magnético dentro de la cavidad.

Problema 6

Campo de un cilindro macizo de densidad uniforme ρ y radio a.

Tomando una superficie de gauss calculamos el campo de un cilindro macizo

$$\oint_{C_r} \mathbf{E}_{CM} \cdot \mathbf{dS} = 4\pi Q_{\text{enc}}$$

Problema 6

<u>Campo de un cilindro macizo de densidad uniforme ρ y radio a.</u>

Tomando una superficie de gauss calculamos el campo de un cilindro macizo

$$\oint_{C_r} \mathbf{E}_{CM} \cdot \mathbf{dS} = 4\pi Q_{\mathsf{enc}}$$

si $r \leq a$

$$E_{CM}(\mathbf{r})2\pi|\mathbf{r}|L = 4\pi(\rho\pi|\mathbf{r}|^2 L) \implies E_{CM}(\mathbf{r}) = 2\pi\rho|\mathbf{r}|$$

Problema 6

<ins>Campo de un cilindro macizo de densidad uniforme ρ y radio a.</ins>

Tomando una superficie de gauss calculamos el campo de un cilindro macizo

$$\oint_{C_r} \mathbf{E}_{CM} \cdot \mathbf{dS} = 4\pi Q_{\mathsf{enc}}$$

si $r \leq a$

$$E_{CM}(\mathbf{r}) 2\pi |\mathbf{r}| L = 4\pi(\rho\pi|\mathbf{r}|^2 L) \implies E_{CM}(\mathbf{r}) = 2\pi\rho|\mathbf{r}|$$

si $r > a$

$$E_{CM}(\mathbf{r}) 2\pi |\mathbf{r}| L = 4\pi(\rho\pi a^2 L) \implies E_{CM}(\mathbf{r}) = 2\pi\rho\frac{a^2}{|\mathbf{r}|}$$

Problema 6

Campo de un cilindro macizo de densidad uniforme ρ y radio a.

Tomando una superficie de gauss calculamos el campo de un cilindro macizo

$$\oint_{C_r} \mathbf{E}_{CM} \cdot \mathbf{dS} = 4\pi Q_{\text{enc}}$$

si $r \leq a$

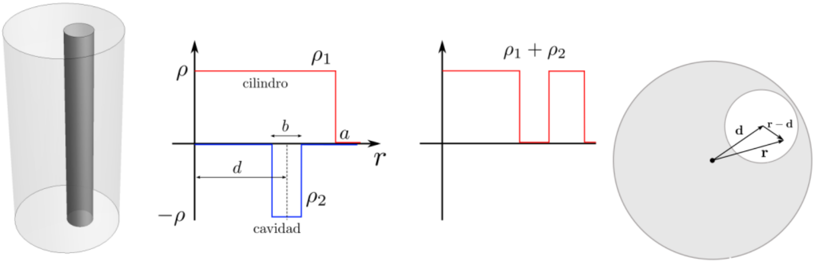
$$E_{CM}(\mathbf{r})2\pi|\mathbf{r}|L = 4\pi(\rho\pi|\mathbf{r}|^2 L) \implies E_{CM}(\mathbf{r}) = 2\pi\rho|\mathbf{r}|$$

si $r > a$

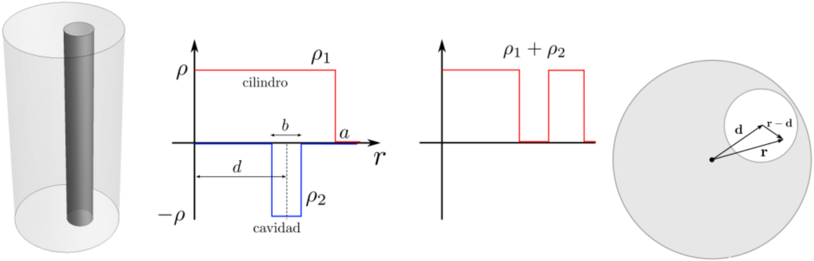
$$E_{CM}(\mathbf{r})2\pi|\mathbf{r}|L = 4\pi(\rho\pi a^2 L) \implies E_{CM}(\mathbf{r}) = 2\pi\rho\frac{a^2}{|\mathbf{r}|}$$

$$\mathbf{E}_{CM}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 2\pi\rho|\mathbf{r}|\hat{r} & , r \leq a \\ 2\pi\rho\frac{a^2}{|\mathbf{r}|}\hat{r} & , r > a \end{cases} = \begin{cases} 2\pi\rho\mathbf{r} & , r \leq a \\ 2\pi\rho\frac{a^2}{|\mathbf{r}|^2}\mathbf{r} & , r > a \end{cases}$$

Problema 6

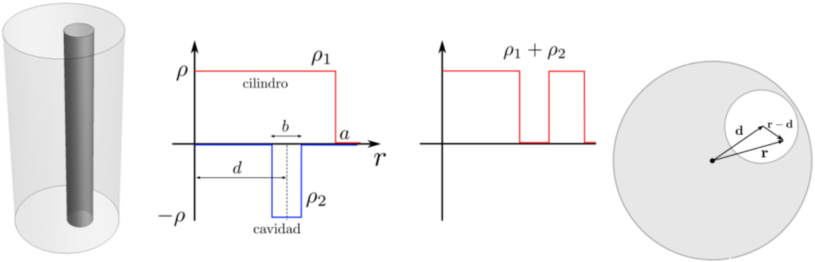


Problema 6



$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{CM}(\mathbf{r})$ de radio a y $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{CM}(\mathbf{r} - \mathbf{d})$ de radio b

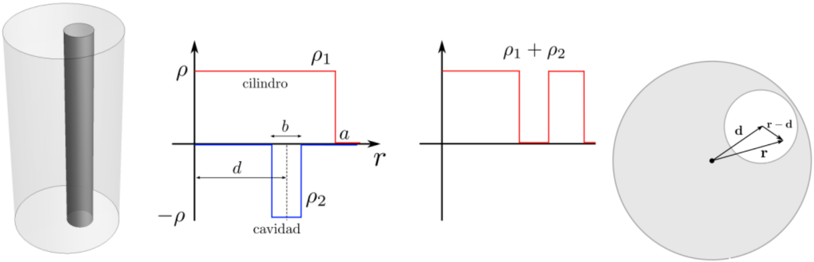
Problema 6



$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{CM}(\mathbf{r})$ de radio a y $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{CM}(\mathbf{r} - \mathbf{d})$ de radio b En todo el espacio vale que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \tag{1}$$

Problema 6



$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{CM}(\mathbf{r})$ de radio a y $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{CM}(\mathbf{r}-\mathbf{d})$ de radio b En todo el espacio vale que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \tag{1}$$

y dentro del cilindro chico que a su vez está adentro del grande el campo es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi\rho\mathbf{r} - 2\pi\rho(\mathbf{r}-\mathbf{d}) = 2\pi\rho\mathbf{d}$$

que es una constante.

Problema 6

b) En vez de tener un cilindro cargado, circula una corriente total I.

Problema 6

b) En vez de tener un cilindro cargado, circula una corriente total I.

Campo del cilindro completo

$$B2\pi r = \oint_{C_r} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \frac{4\pi}{c} I_{\textsf{enc}} = \frac{4\pi}{c} I \frac{\pi r^2}{\pi a^2}$$

Problema 6

b) En vez de tener un cilindro cargado, circula una corriente total I.

Campo del cilindro completo

$$B2\pi r = \oint_{C_r} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \frac{4\pi}{c} I_{\mathsf{enc}} = \frac{4\pi}{c} I \frac{\pi r^2}{\pi a^2}$$

$$\implies \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{2Ir}{ca^2} \hat{\varphi} = \frac{2I}{ca^2} \hat{z} \times \mathbf{r}$$

Problema 6

b) En vez de tener un cilindro cargado, circula una corriente total I.

Campo del cilindro completo

$$B 2\pi r = \oint_{C_r} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \frac{4\pi}{c} I_{\mathsf{enc}} = \frac{4\pi}{c} I \frac{\pi r^2}{\pi a^2}$$

$$\implies \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{2Ir}{ca^2}\hat{\varphi} = \frac{2I}{ca^2}\hat{z} \times \mathbf{r}$$

Campo del cilindro desplazado con corriente opuesta

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{2Ir}{ca^2}\hat{\varphi} = -\frac{2I}{ca^2}\hat{z} \times (\mathbf{r} - \mathbf{d})$$

Problema 6

b) En vez de tener un cilindro cargado, circula una corriente total I.

Campo del cilindro completo

$$B2\pi r = \oint_{C_r} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{enc}} = \frac{4\pi}{c} I \frac{\pi r^2}{\pi a^2}$$

$$\implies \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{2Ir}{ca^2}\hat{\varphi} = \frac{2I}{ca^2}\hat{z} \times \mathbf{r}$$

Campo del cilindro desplazado con corriente opuesta

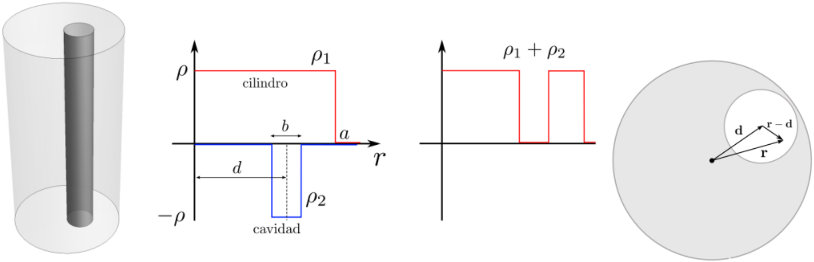
$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{2Ir}{ca^2}\hat{\varphi} = -\frac{2I}{ca^2}\hat{z} \times (\mathbf{r} - \mathbf{d})$$

Por superposición el campo total es

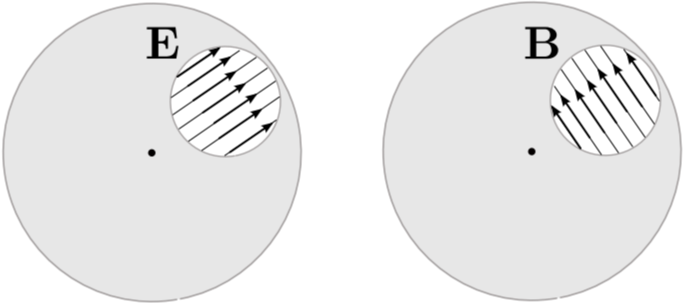
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{2I}{ca^2}\hat{z} \times \mathbf{d}$$

Problema 6

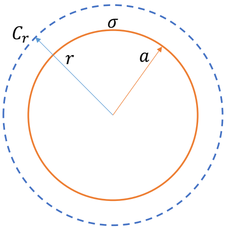
Los campos son constantes dentro del hueco



Problema 8

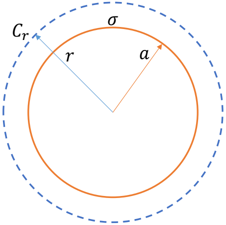


Problem 8 a)



Cascaron esférico con densidad de carga uniforme σ.

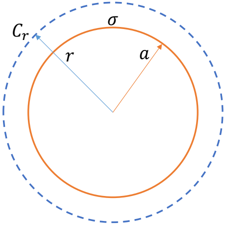
Problem 8 a)



Cascaron esférico con densidad de carga uniforme σ.

$$\oint_{C_r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = 4\pi Q_{\text{enc}}$$

Problem 8 a)



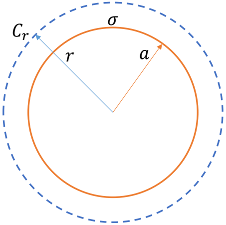
Cascaron esférico con densidad de carga uniforme σ.

$$\oint_{C_r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = 4\pi Q_{\text{enc}}$$

Si $r \geq a$

$$E 4\pi r^2 = 4\pi 4\pi a^2 \sigma \implies E = \frac{4\pi a^2 \sigma}{r^2}$$

Problem 8 a)



Cascaron esférico con densidad de carga uniforme σ.

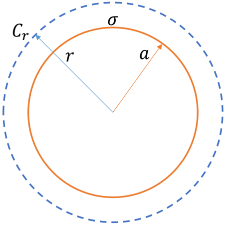
$$\oint_{C_r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = 4\pi Q_{\text{enc}}$$

Si $r \geq a$

$$E 4\pi r^2 = 4\pi 4\pi a^2 \sigma \implies E = \frac{4\pi a^2 \sigma}{r^2}$$

$$\implies \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi a^2 \sigma}{r^2} \hat{r}, \quad r \geq a$$

Problem 8 a)



Cascaron esférico con densidad de carga uniforme σ.

$$\oint_{C_r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = 4\pi Q_{\textsf{enc}}$$

Si $r \geq a$

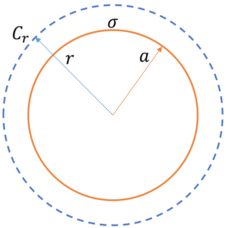
$$E 4\pi r^2 = 4\pi 4\pi a^2 \sigma \implies E = \frac{4\pi a^2 \sigma}{r^2}$$

$$\implies \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi a^2 \sigma}{r^2}\hat{r}, \quad r \geq a$$

$$\implies \Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r}, \quad r \geq a$$

$$Q = 4\pi a^2 \sigma$$

Problem 8 a)



Cascaron esférico con densidad de carga uniforme σ.

$$\oint_{C_r} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} = 4\pi Q_{\text{enc}}$$

Si $r \geq a$

$$E 4\pi r^2 = 4\pi 4\pi a^2\sigma \implies E = \frac{4\pi a^2\sigma}{r^2}$$

$$\implies \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi a^2\sigma}{r^2}\hat{r}, \quad r \geq a$$

$$\implies \Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r}, \quad r \geq a$$

$$Q = 4\pi a^2\sigma$$

Si $r < a$

$$\oint_{C_r} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} = 4\pi Q_{\text{enc}} = 0 \implies \mathbf{E} = 0 \implies \Phi = \text{cte.}$$

Problema 8 a)

Para que el potencial sea continuo

$$\Phi(r < a) = \Phi(r = a) = \frac{Q}{a}$$

Problema 8 a)

Para que el potencial sea continuo

$$\Phi(r < a) = \Phi(r = a) = \frac{Q}{a}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{a} & , r < a \\ \frac{Q}{r} & , r \geq a \end{cases} .$$

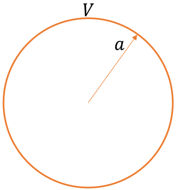
Problema 8 a)

Para que el potencial sea continuo

$$\Phi(r < a) = \Phi(r = a) = \frac{Q}{a}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{a} & , r < a \\ \frac{Q}{r} & , r \geq a \end{cases} .$$

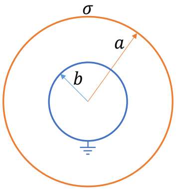
El cascaron a potencial V en $r = a$ debe ser esférico



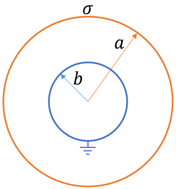
$$V = \Phi(r = a) = \frac{Q}{a} \implies Q = Va$$

$$\Phi_V(\mathbf{r}) = \begin{cases} V & , r < a \\ \frac{Va}{r} & , r \geq a \end{cases} .$$

Problema 8 a)



Problema 8 a)

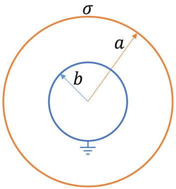


Queremos resolver

$$\nabla^2\Phi(r) = -4\pi\rho(r), \quad r \geq b$$

$$\Phi(r = b) = 0.$$

Problema 8 a)



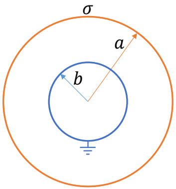
Queremos resolver

$$\nabla^2 \Phi(r) = -4\pi\rho(r), \quad r \geq b$$

$$\Phi(r = b) = 0.$$

(sabemos que $\Phi = 0$ si $r \leq b$).

Problema 8 a)



Queremos resolver

$$\nabla^2\Phi(r) = -4\pi\rho(r), \quad r \geq b$$

$$\Phi(r = b) = 0.$$

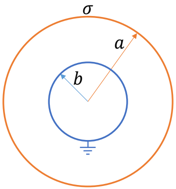
(sabemos que $\Phi = 0$ si $r \leq b$).
Tomando

$$\rho_1 = \sigma\delta(r - a)$$

y Φ_1 como su integral de Poisson satisface

$$\nabla^2\Phi_1 = -4\pi\rho_1$$

Problema 8 a)



Queremos resolver

$$\nabla^2\Phi(r) = -4\pi\rho(r), \quad r \geq b$$

$$\Phi(r = b) = 0.$$

(sabemos que $\Phi = 0$ si $r \leq b$).
Tomando

$$\rho_1 = \sigma\delta(r - a)$$

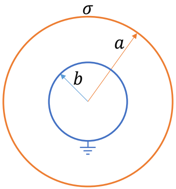
y Φ_1 como su integral de Poisson satisface

$$\nabla^2\Phi_1 = -4\pi\rho_1$$

pero

$$\Phi(r = b) \neq 0.$$

Problema 8 a)



Queremos resolver

$$\nabla^2\Phi(r) = -4\pi\rho(r), \quad r \geq b$$

$$\Phi(r=b) = 0.$$

(sabemos que $\Phi = 0$ si $r \leq b$).
Tomando

$$\rho_1 = \sigma\delta(r-a)$$

y Φ_1 como su integral de Poisson satisface

$$\nabla^2\Phi_1 = -4\pi\rho_1$$

pero

$$\Phi(r=b) \neq 0.$$

Problema 8 b)

Agregamos

$$\rho_2(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r})$$

satisface

$$\nabla^2 \Phi_2(\mathbf{r}) = 0, \quad r \geq b$$

con

$$\Phi_2 = \frac{Q_2}{r}$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$

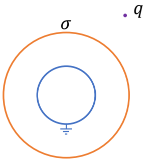
$$0 = \Phi(r = b) = \Phi_1(r = b) + \Phi_2(r = b)$$

$$0 = \frac{Q}{a} + \frac{Q_2}{b} \implies Q_2 = -\frac{b}{a}Q$$

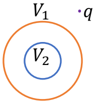
Entonces la solución es

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_1 + \Phi_2 = \begin{cases} 0 & , r < b \\ \frac{Q}{a} + \frac{Q_2}{r} & , b \leq r \leq a \\ \frac{Q}{r} + \frac{Q_2}{r} & , r \geq a \end{cases}$$

Problema 8 b)

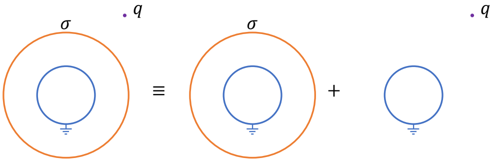


$\equiv$

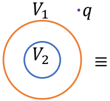


$\equiv$

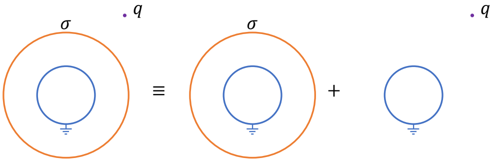
Problema 8 b)



$$\Phi \equiv \Phi_\sigma + \Phi_q$$



Problema 8 b)



$$\Phi \equiv \Phi_\sigma + \Phi_q$$