FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2023

PRÁCTICA DEL 20/09:
GUÍA 3 - MEDIOS MAGNÉTICOS

Ecuaciones de Maxwell (estáticas) en medios materiales

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\,\rho_\ell \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_\ell \end{aligned}$$

Ecuaciones para el **campo magnético** $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_t = \frac{4\pi}{c}\,(\mathbf{j}_\ell + \mathbf{j}_m) \end{aligned}$$

$\mathbf{j}_\ell$: *densidad de corrientes libres en volumen.*
$\mathbf{j}_m$: *densidad de corrientes magnéticas en volumen*,

$$\mathbf{j}_m = c\,\nabla \times \mathbf{M}$$

con $\mathbf{M} = \sum_i N_i\,\langle \mathbf{m}_i \rangle$: **campo de magnetización** (*dipolos magnéticos por unidad de volumen*).

recuerdo de Guía 1: Se puede definir un potencial vector $\mathbf{A}$ (en el gauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) tal que:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad / \quad \nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}) \underbrace{=}_{\nabla\cdot\mathbf{A}=0} -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_t \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\mathbf{j}_t(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$: integral de Poisson para $\mathbf{A}$

Ecuaciones para el campo **intensidad magnética**: $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\,\mathbf{M}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{H} &= -4\pi\,\nabla \cdot \mathbf{M} \;\equiv\; 4\pi\rho_m \quad (\rho_m\text{: \textit{densidad de carga magnética en volumen}}) \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_\ell \end{aligned}$$

Teorema de Helmholtz: $\mathbf{H}$ se puede descomponer unívocamente como

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \underbrace{\mathbf{H}_d(\mathbf{r})}_{irrotaiconal} + \underbrace{\mathbf{H}_r(\mathbf{r})}_{solenoidal} \quad / \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_d &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_r &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{H}_d(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi_H(\mathbf{r}) \quad / \quad \nabla^2 \Phi_H(\mathbf{r}) = -4\pi\,\rho_m \quad \Longrightarrow \quad \Phi_H(\mathbf{r}) = \int d^3r'\,\frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

y

$$\mathbf{H}_r(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_H(\mathbf{r}) \quad / \quad \nabla^2 \mathbf{A}_H(\mathbf{r}) \underbrace{=}_{\nabla\cdot\mathbf{A}_H=0} -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_\ell \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}_H(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\mathbf{j}_\ell(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

*

Observación: Si $\mathbf{j}_\ell = 0 \implies \mathbf{H} = -\nabla\Phi_H$.

Condiciones de empalme: En la superficie que separa dos medios, usando la ley de Gauss y Stokes, se obtiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{g}_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}} &= 4\pi\,\sigma_m \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{g}_\ell \end{aligned} \qquad [\hat{\mathbf{n}} \text{ tiene dirección de } (1) \to (2)]$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}} &= -\,\sigma_m \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) &= \frac{1}{c}\,\mathbf{g}_m \end{aligned}$$

Medio magnético Lineal Isótropo y Homogéneo (LIH):

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \chi_m\,\mathbf{H} \qquad (\chi_m\text{: susceptibilidad magnética}) \\ \mathbf{B} &= \underbrace{(1 + 4\pi\,\chi_m)}_{\mu}\,\mathbf{H} \qquad (\mu\text{: permeabilidad magnética}) \end{aligned}$$

- LIH con $\mu > 1$: paramagnético
- LIH con $\mu < 1$: diamagnético

Otros medios magnéticos típicos (no lineales):

- $\mathbf{M}(\mathbf{H} = 0) \neq 0$: imán permanente
- $\mathbf{B} = f(\mathbf{H}, historia)$: ferromagnético con histéresis

*Divergencia y rotor en coordenadas curvilíneas: ver material adicional en la página web [link: Operadores diferenciales.]