Física Teórica 1 - Práctica

Separación de variables en coordenadas cartesianas - Regiones no acotadas.

Temas a tratar:

- Repaso separación de variables

Temas a tratar:

- Repaso separación de variables
- Problema 7

Temas a tratar:

- Repaso separación de variables
- Problema 7
- Problema 11

Estrategia para resolver problemas por separación de variables

1. Identificar la **geometría del problema**: Si hay planos, cartesianas; si hay esferas, esféricas, si hay cilindros, cilíndricas.

Estrategia para resolver problemas por separación de variables

1. Identificar la **geometría del problema**: Si hay planos, cartesianas; si hay esferas, esféricas, si hay cilindros, cilíndricas.

2. Encontrar una **superficie** Σ (o varias paralelas) con la geometría del problema que contenga esa densidad de carga.

Repaso separación de variables

Estrategia para resolver problemas por separación de variables

1. Identificar la **geometría del problema**: Si hay planos, cartesianas; si hay esferas, esféricas, si hay cilindros, cilíndricas.

2. Encontrar una **superficie** Σ (o varias paralelas) con la geometría del problema que contenga esa densidad de carga.

3. Encontrar una **base de soluciones** de la ecuación de Laplace en las regiones del espacio sin la carga. Procurando tener una base de funciones en las direcciones paralelas a Σ.

Repaso separación de variables

Estrategia para resolver problemas por separación de variables

1. Identificar la **geometría del problema**: Si hay planos, cartesianas; si hay esferas, esféricas, si hay cilindros, cilíndricas.

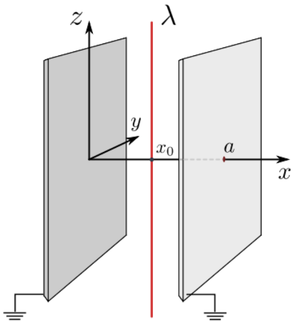
2. Encontrar una **superficie** Σ (o varias paralelas) con la geometría del problema que contenga esa densidad de carga.

3. Encontrar una **base de soluciones** de la ecuación de Laplace en las regiones del espacio sin la carga. Procurando tener una base de funciones en las direcciones paralelas a Σ.

4. Pegar las soluciones en las distintas regiones usando las condiciones en las interfaces entre ellas: **continuidad** y **salto de la derivada** del potencial.

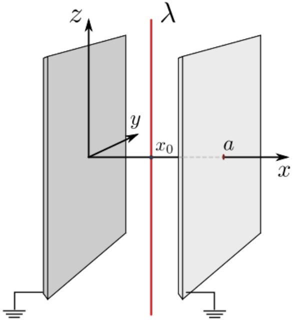
Problema 7

Geometría del problema:



Problema 7

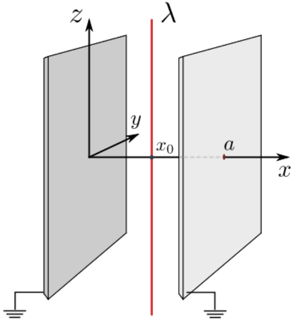
Geometría del problema:



Los contornos son planos
$\Longrightarrow$ usamos **cartesianas**

Problema 7

Geometría del problema:

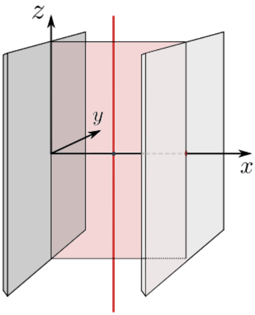


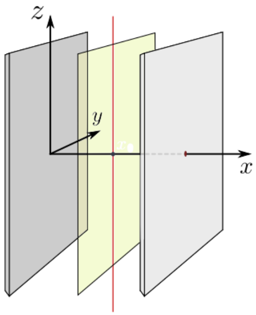
Los contornos son planos
$\Longrightarrow$ usamos **cartesianas**

Varias superficies que contienen a la distribución de carga:

a) Corte XZ

b) Corte YZ.





a) Corte XZ

Separamos al espacio en dos regiones: **I)** $y > 0$, **II)** $y < 0$

a) Corte XZ

Separamos al espacio en dos regiones: **I)** $y > 0$, **II)** $y < 0$ Como en ninguna de las dos regiones tenemos cargas (porque toda carga está en $y = 0$) en ambas debemos resolver la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

con las condiciones de contorno $\Phi(x = 0, y, z) = \Phi(x = a, y, z) = 0 \ \forall y, z$.

Problema 7- corte XZ

Dada la geometría cartesiana del problema buscamos soluciones de la forma

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{2}$$

Problema 7- corte XZ

Dada la geometría cartesiana del problema buscamos soluciones de la forma

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{2}$$

Reemplazamos en Laplace

$$X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = 0 \tag{3}$$

Problema 7- corte XZ

Dada la geometría cartesiana del problema buscamos soluciones de la forma

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{2}$$

Reemplazamos en Laplace

$$X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = 0 \tag{3}$$

Dividimos por $X(x)Y(y)Z(z)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0 \tag{4}$$

Problema 7- corte XZ

Dada la geometría cartesiana del problema buscamos soluciones de la forma

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{2}$$

Reemplazamos en Laplace

$$X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = 0 \tag{3}$$

Dividimos por $X(x)Y(y)Z(z)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0 \tag{4}$$

Tomando

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 < 0,\ \frac{Y''(y)}{Y(y)} = p_y^2 > 0,\ \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -q_z^2 < 0 \tag{5}$$

Problema 7- corte XZ

Dada la geometría cartesiana del problema buscamos soluciones de la forma

$$\Phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{2}$$

Reemplazamos en Laplace

$$X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = 0 \tag{3}$$

Dividimos por $X(x)Y(y)Z(z)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0 \tag{4}$$

Tomando

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 < 0,\ \frac{Y''(y)}{Y(y)} = p_y^2 > 0,\ \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -q_z^2 < 0 \tag{5}$$

reemplazando

$$p_y^2 = k_x^2 + q_z^2. \tag{6}$$

Problema 7- corte XZ

Dada la geometría cartesiana del problema buscamos soluciones de la forma

$$\Phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{2}$$

Reemplazamos en Laplace

$$X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = 0 \tag{3}$$

Dividimos por $X(x)Y(y)Z(z)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0 \tag{4}$$

Tomando

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 < 0,\ \frac{Y''(y)}{Y(y)} = p_y^2 > 0,\ \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -q_z^2 < 0 \tag{5}$$

reemplazando

$$p_y^2 = k_x^2 + q_z^2. \tag{6}$$

Acá nos adelantamos a que necesitamos base de soluciones en x y z al imponer que las constantes de estas direcciones sean negativas para que formen una base.

Problema 7- corte XZ

Necesitamos base en XZ (direcciones paralelas a la superficie divisoria y=0) tales que

$\Phi(x = 0) = \Phi(x = a) = 0$

Problema 7- corte XZ

Necesitamos base en XZ (direcciones paralelas a la superficie divisoria y=0) tales que

$\Phi(x = 0) = \Phi(x = a) = 0$

Base en X:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 \implies X''(x) + k_x^2 X(x) = 0 \implies X(x) = A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)$$

Problema 7- corte XZ

Necesitamos base en XZ (direcciones paralelas a la superficie divisoria y=0) tales que

$\Phi(x = 0) = \Phi(x = a) = 0$

Base en X:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 \implies X''(x) + k_x^2 X(x) = 0 \implies X(x) = A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)$$

$$\Phi(x = 0) = 0 \implies X(x = 0) = 0 \implies B = 0$$

Problema 7- corte XZ

Necesitamos base en XZ (direcciones paralelas a la superficie divisoria y=0) tales que

$\Phi(x = 0) = \Phi(x = a) = 0$

Base en X:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 \implies X''(x) + k_x^2 X(x) = 0 \implies X(x) = A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)$$

$$\Phi(x = 0) = 0 \implies X(x = 0) = 0 \implies B = 0$$

$$\Phi(x = a) = 0 \implies \sin(k_x a) = 0 \implies k_x a = n\pi \implies k_n = \frac{n\pi}{a}$$

Problema 7- corte XZ

La base en X es entonces

$$\{\sin(k_n x)\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{7}$$

Problema 7- corte XZ

La base en X es entonces

$$\{\sin(k_n x)\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{7}$$

Base en Z:

$$Z''(z) - q_z^2 Z(z) = 0 \tag{8}$$

Problema 7- corte XZ

La base en X es entonces

$$\{\sin(k_n x)\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{7}$$

Base en Z:

$$Z''(z) - q_z^2 Z(z) = 0 \tag{8}$$

Como no hay restricción es esa dirección la base está dada por

$$\{\sin(q_z z), \cos(q_z z)\}_{k_z>0} \quad \text{o} \quad \{e^{iq_z z}\}_{q_z\in\mathbb{R}} \tag{9}$$

Problema 7- corte XZ

La base en X es entonces

$$\{\sin(k_n x)\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{7}$$

Base en Z:

$$Z''(z) - q_z^2 Z(z) = 0 \tag{8}$$

Como no hay restricción es esa dirección la base está dada por

$$\{\sin(q_z z), \cos(q_z z)\}_{k_z>0} \quad \text{o} \quad \{e^{iq_z z}\}_{q_z\in\mathbb{R}} \tag{9}$$

Solución en Y:

$$Y''(y) + p_n(q_z)^2 Y(y) = 0 \implies Y(y) = Ae^{-p_n(q_z)y} + Be^{p_n(q_z)y} \tag{10}$$

recuerden que

$$p_n(q_z) = \sqrt{k_n^2 + q_z^2}. \tag{11}$$

Problema 7- corte XZ

La base en X es entonces

$$\{\sin(k_n x)\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{7}$$

Base en Z:

$$Z''(z) - q_z^2 Z(z) = 0 \tag{8}$$

Como no hay restricción es esa dirección la base está dada por

$$\{\sin(q_z z), \cos(q_z z)\}_{k_z>0} \quad \text{o} \quad \{e^{iq_z z}\}_{q_z\in\mathbb{R}} \tag{9}$$

Solución en Y:

$$Y''(y) + p_n(q_z)^2 Y(y) = 0 \implies Y(y) = Ae^{-p_n(q_z)y} + Be^{p_n(q_z)y} \tag{10}$$

recuerden que

$$p_n(q_z) = \sqrt{k_n^2 + q_z^2}. \tag{11}$$

Además queremos que el pontencial sea finito en el infinito

$$\Phi(y \to +\infty) = \Phi(y \to -\infty) < \infty \tag{12}$$

Entonces para que la solución en Y sea finita en el infinito

$$Y(y \to \pm\infty) < \infty \implies Y(y) = \begin{cases} Ae^{-p_n(q_z)y} & y > 0 \\ Be^{p_n(q_z)y} & y < 0 \end{cases} \tag{13}$$

Entonces para que la solución en Y sea finita en el infinito

$$Y(y \to \pm\infty) < \infty \implies Y(y) = \begin{cases} Ae^{-p_n(q_z)y} & y > 0 \\ Be^{p_n(q_z)y} & y < 0 \end{cases} \tag{13}$$

La solución de la ecuación de Laplace será entonces alguna combinación lineal de $X(x)Y(y)Z(z)$

$$\Phi(x,y,z) = \begin{cases} \Phi_I(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A_n(q_z) e^{-p_n(q_z)y} e^{iq_z z} \sin(k_n x) & y > 0 \\ \Phi_{II}(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z B_n(q_z) e^{p_n(q_z)y} e^{iq_z z} \sin(k_n x) & y < 0 \end{cases} \tag{14}$$

siendo $A_n(q_z)$ y $B_n(q_z)$ constantes que determinaremos usando las condiciones en la interfaz entre las dos regiones, o sea, $y = 0$.

Continuidad en $y = 0$

$$\Phi_I(x, y = 0, z) = \Phi_{II}(x, y = 0, z), \ \forall x, z \tag{15}$$

Problema 7- corte XZ

Continuidad en $y = 0$

$$\Phi_I(x, y = 0, z) = \Phi_{II}(x, y = 0, z), \ \forall x, z \tag{15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A_n(q_z) e^{iq_z z} \sin(k_n x) = \sum_{n} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z B_n(q_z) e^{iq_z z} \sin(k_n x) \tag{16}$$

como $\{e^{iq_z z} \sin(k_n x)\}$ es una base de funciones (es LI)

Problema 7- corte XZ

Continuidad en $y = 0$

$$\Phi_I(x, y = 0, z) = \Phi_{II}(x, y = 0, z), \ \forall x, z \tag{15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A_n(q_z) e^{iq_z z} \sin(k_n x) = \sum_{n} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z B_n(q_z) e^{iq_z z} \sin(k_n x) \tag{16}$$

como $\{e^{iq_z z} \sin(k_n x)\}$ es una base de funciones (es LI) entonces por unicidad en la escritura

$$A_n(q_z) = B_n(q_z). \tag{17}$$

Problema 7- corte XZ

Usando la condición del **salto en la derivada** tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{n}}|_{\Sigma^-} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{n}}|_{\Sigma^+} = 4\pi\sigma \tag{18}$$

Problema 7- corte XZ

Usando la condición del **salto en la derivada** tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{n}}|_{\Sigma^-} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathsf{n}}|_{\Sigma^+} = 4\pi\sigma \tag{18}$$

Usando que la normal a la superficie es $\mathsf{n} = \hat{y}$ y que la densidad de carga superficial es $\sigma(x, z) = \lambda\delta(x - a/2)$

Problema 7- corte XZ

Usando la condición del **salto en la derivada** tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^-} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^+} = 4\pi\sigma \tag{18}$$

Usando que la normal a la superficie es $\mathrm{n} = \hat{y}$ y que la densidad de carga superficial es $\sigma(x,z) = \lambda\delta(x - a/2)$

$$\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial y}\Big|_{y=0^-} - \frac{\partial \Phi_{I}}{\partial y}\Big|_{y=0^+} = 4\pi\lambda\delta(x) \tag{19}$$

Problema 7- corte XZ

Usando la condición del **salto en la derivada** tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^-} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^+} = 4\pi\sigma \tag{18}$$

Usando que la normal a la superficie es $\mathrm{n} = \hat{y}$ y que la densidad de carga superficial es $\sigma(x,z) = \lambda\delta(x - a/2)$

$$\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial y}|_{y=0^-} - \frac{\partial \Phi_{I}}{\partial y}|_{y=0^+} = 4\pi\lambda\delta(x) \tag{19}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dq_z A_n(q_z) p_n(k_z) e^{iq_z z}\sin(k_n x) - \sum_{n}\int_{-\infty}^{\infty} dq_z A_n(q_z)(-p_n(k_z)) e^{iq_z z}\sin(k_n x) = 4\pi\lambda\delta(x - a/2) \tag{20}$$

Problema 7- corte XZ

Usando la condición del **salto en la derivada** tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^-} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^+} = 4\pi\sigma \tag{18}$$

Usando que la normal a la superficie es $\mathrm{n} = \hat{y}$ y que la densidad de carga superficial es $\sigma(x,z) = \lambda\delta(x - a/2)$

$$\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial y}|_{y=0^-} - \frac{\partial \Phi_{I}}{\partial y}|_{y=0^+} = 4\pi\lambda\delta(x) \tag{19}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dq_z A_n(q_z) p_n(k_z) e^{iq_z z}\sin(k_n x) - \sum_{n}\int_{-\infty}^{\infty} dq_z A_n(q_z)(-p_n(k_z)) e^{iq_z z}\sin(k_n x) = 4\pi\lambda\delta(x - a/2) \tag{20}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dq_z A_n(q_z) 2p_n(k_z) e^{iq_z z}\sin(k_n x) = 4\pi\lambda\delta(x - a/2). \tag{21}$$

Problema 7- corte XZ

Para despejar $A_n(q_z)$ usamos la ortogonalidad de la base

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} e^{-iq'_z z} = 2\pi\delta(q_z - q'_z) \tag{22}$$

Problema 7- corte XZ

Para despejar $A_n(q_z)$ usamos la ortogonalidad de la base

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} e^{-iq_z' z} = 2\pi\delta(q_z - q_z') \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(k_m x) \sin(k_n x) = \frac{a}{2}\delta_{nm} \tag{23}$$

Para despejar $A_n(q_z)$ usamos la ortogonalidad de la base

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} e^{-iq'_z z} = 2\pi\delta(q_z - q'_z) \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(k_m x) \sin(k_n x) = \frac{a}{2}\delta_{nm} \tag{23}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(k_m x) \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iq'_z z} \times \quad (21) \tag{24}$$

Problema 7- corte XZ

Para despejar $A_n(q_z)$ usamos la ortogonalidad de la base

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} e^{-iq'_z z} = 2\pi\delta(q_z - q'_z) \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(k_m x) \sin(k_n x) = \frac{a}{2}\delta_{nm} \tag{23}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(k_m x) \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iq'_z z} \times \quad (21) \tag{24}$$

$$A_m(q'_z) 2p_m \frac{a}{2} 2\pi = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(k_m x) \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iq'_z z} 4\pi\lambda\delta(x - a/2) \tag{25}$$

Problema 7- corte XZ

Para despejar $A_n(q_z)$ usamos la ortogonalidad de la base

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} e^{-iq'_z z} = 2\pi\delta(q_z - q'_z) \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(k_m x) \sin(k_n x) = \frac{a}{2}\delta_{nm} \tag{23}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(k_m x) \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iq'_z z} \times \quad (21) \tag{24}$$

$$A_m(q'_z) 2p_m \frac{a}{2} 2\pi = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(k_m x) \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iq'_z z} 4\pi\lambda\delta(x - a/2) \tag{25}$$

$$A_m(q'_z) 2p_m \frac{a}{2} 2\pi = \sin(k_m \frac{a}{2}) 2\pi\delta(q'_z) 4\pi\lambda \tag{26}$$

Problema 7- corte XZ

Para despejar $A_n(q_z)$ usamos la ortogonalidad de la base

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} e^{-iq'_z z} = 2\pi\delta(q_z - q'_z) \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(k_m x) \sin(k_n x) = \frac{a}{2}\delta_{nm} \tag{23}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(k_m x) \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iq'_z z} \times \quad (21) \tag{24}$$

$$A_m(q'_z) 2p_m \frac{a}{2} 2\pi = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(k_m x) \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iq'_z z} 4\pi\lambda\delta(x - a/2) \tag{25}$$

$$A_m(q'_z) 2p_m \frac{a}{2} 2\pi = \sin(k_m \frac{a}{2}) 2\pi\delta(q'_z) 4\pi\lambda \tag{26}$$

$$\boxed{A_m(q'_z) = \frac{\sin(k_m \frac{a}{2})\delta(q'_z) 4\pi\lambda}{p_m(q'_z) a}} \tag{27}$$

Reemplazando

$$\Phi(x,y,z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dq_z A_n(q_z) e^{-p_n(q_z)y} e^{iq_z z}\sin(k_n x) & y > 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dq_z A_n(q_z) e^{p_n(q_z)y} e^{iq_z z}\sin(k_n x) & y < 0 \end{cases} \tag{28}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dq_z A_n(q_z) e^{-p_n(q_z)|y|} e^{iq_z z}\sin(k_n x) \tag{29}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{\sin(k_n \frac{a}{2})\delta(q_z)4\pi\lambda}{p_n(q_z)a} e^{-p_n(q_z)|y|} e^{iq_z z}\sin(k_n x) \tag{30}$$

Problema 7- corte XZ

La integral de la delta nos hace evaluar en $q_z = 0$. Recordando que

$$p_n(0) = \sqrt{0^2 + k_n^2} = k_n = \frac{n\pi}{a} \tag{31}$$

Problema 7- corte XZ

La integral de la delta nos hace evaluar en $q_z = 0$. Recordando que

$$p_n(0) = \sqrt{0^2 + k_n^2} = k_n = \frac{n\pi}{a} \tag{31}$$

$$\boxed{\Phi(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\lambda}{n} \sin(k_n \frac{a}{2}) \sin(k_n x) e^{-n\pi|y|/a}} \tag{32}$$

La integral de la delta nos hace evaluar en $q_z = 0$. Recordando que

$$p_n(0) = \sqrt{0^2 + k_n^2} = k_n = \frac{n\pi}{a} \tag{31}$$

$$\boxed{\Phi(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\lambda}{n} \sin(k_n \frac{a}{2}) \sin(k_n x) e^{-n\pi|y|/a}} \tag{32}$$

¿Tiene sentido? Dependencias, simetrías, unidades.

b) Corte YZ

Necesitamos base en z y en y. Como además no tenemos condiciones de contorno en estas direcciones podemos tomar la base

$$\{e^{ip_y y}, e^{iq_z z}\}_{p_y, q_z \in \mathbb{R}} \tag{33}$$

b) Corte YZ

Necesitamos base en z y en y. Como además no tenemos condiciones de contorno en estas direcciones podemos tomar la base

$$\{e^{ip_y y}, e^{iq_z z}\}_{p_y, q_z \in \mathbb{R}} \tag{33}$$

mientras que en la dirección X la base de soluciones vendrá dada ahora por exponenciales reales

$$\{e^{-k_x x}, e^{k_x x}\}, \quad \text{con} \quad k_x(p_y, q_z) = \sqrt{q_z^2 + p_y^2}.$$

b) Corte YZ

Necesitamos base en z y en y. Como además no tenemos condiciones de contorno en estas direcciones podemos tomar la base

$$\{e^{ip_y y}, e^{iq_z z}\}_{p_y, q_z \in \mathbb{R}} \tag{33}$$

mientras que en la dirección X la base de soluciones vendrá dada ahora por exponenciales reales

$$\{e^{-k_x x}, e^{k_x x}\}, \quad \text{con} \quad k_x(p_y, q_z) = \sqrt{q_z^2 + p_y^2}.$$

Recuerden que ahora debemos partir la solución del potencial dos regiones **I)** $0 \leq x < a/2$ y **II)** $a/2 < x \leq a$.

Problema 7- corte YZ

En la **región I)** el potencial debe satisfacer la condición de contorno

$$\Phi(x = 0) = 0 \tag{34}$$

Problema 7- corte YZ

En la **región I)** el potencial debe satisfacer la condición de contorno

$$\Phi(x=0)=0 \tag{34}$$

y entonces la solución en X debe ser de la forma

$$X(x)=Ae^{k_x x}+Be^{-k_x x}, \tag{35}$$

Problema 7- corte YZ

En la **región I)** el potencial debe satisfacer la condición de contorno

$$\Phi(x=0)=0 \tag{34}$$

y entonces la solución en X debe ser de la forma

$$X(x)=Ae^{k_x x}+Be^{-k_x x}, \tag{35}$$

con

$$0=X(x=0)=A+B \implies B=-A. \tag{36}$$

En la **región I)** el potencial debe satisfacer la condición de contorno

$$\Phi(x=0)=0 \tag{34}$$

y entonces la solución en X debe ser de la forma

$$X(x)=Ae^{k_x x}+Be^{-k_x x}, \tag{35}$$

con

$$0=X(x=0)=A+B \implies B=-A. \tag{36}$$

Luego

$$X(x)=A(e^{k_x x}-e^{-k_x x})=A'\sinh(k_x x). \tag{37}$$

En la **región I)** el potencial debe satisfacer la condición de contorno

$$\Phi(x = 0) = 0 \tag{34}$$

y entonces la solución en X debe ser de la forma

$$X(x) = Ae^{k_x x} + Be^{-k_x x}, \tag{35}$$

con

$$0 = X(x = 0) = A + B \implies B = -A. \tag{36}$$

Luego

$$X(x) = A(e^{k_x x} - e^{-k_x x}) = A' \sinh(k_x x). \tag{37}$$

Para la próxima podríamos habernos adelantado a que tendremos que satisfacer estas condiciones de contorno y directamente proponer la base

$$\{\sinh(k_x x), \cosh(k_x x)\} \tag{38}$$

y descartar las cosenos hiperbólicos que no satisfacen la condición.

Problema 7- corte YZ

En la **región II)** el pontencial debe satisfacer la condición de contorno

$$\Phi(x = a) = 0 \tag{39}$$

Problema 7- corte YZ

En la **región II)** el pontencial debe satisfacer la condición de contorno

$$\Phi(x = a) = 0 \tag{39}$$

y entonces la solución en x debe ser de la forma

$$X(x) = A'' \sinh(k_x(x - a)). \tag{40}$$

($\{\sinh k_x(x-a), \cosh(k_x(x-a))\}$ es base de soluciones y tiramos los cosenos)

Poniendo todo esto junto tenemos que el potencial es

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_I = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A(p_y, q_z) \sinh(k_x x) e^{i(p_y y + q_z z)} & 0 \leq x < a/2 \\ \Phi_{II} = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z B(p_y, q_z) \sinh(k_x (x-a)) e^{i(p_y y + q_z z)} & a/2 < x \leq a \end{cases} . \quad (41)$$

Poniendo todo esto junto tenemos que el potencial es

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_I = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A(p_y, q_z) \sinh(k_x x) e^{i(p_y y + q_z z)} & 0 \leq x < a/2 \\ \Phi_{II} = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z B(p_y, q_z) \sinh(k_x(x-a)) e^{i(p_y y + q_z z)} & a/2 < x \leq a \end{cases} . \quad (41)$$

Debemos entonces "pegar" las soluciones usando las condiciones en $x = a/2$.

Problema 7- corte YZ

Continuidad en $x = a/2$

$$\Phi_I(x = a/2, y, z) = \Phi_{II}(x = a/2, y, z),\ \forall y, z \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A(p_y, q_z) \sinh(k_x a/2) e^{i(p_y y + q_z z)} \\
&\qquad = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z B(p_y, q_z) \sinh(k_x(a/2 - a)) e^{i(p_y y + q_z z)}
\end{aligned} \tag{43}$$

Continuidad en $x = a/2$

$$\Phi_I(x = a/2, y, z) = \Phi_{II}(x = a/2, y, z), \ \forall y, z \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A(p_y, q_z) \sinh(k_x a/2) e^{i(p_y y + q_z z)} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z B(p_y, q_z) \sinh(k_x(a/2 - a)) e^{i(p_y y + q_z z)}\end{aligned} \tag{43}$$

como $\{e^{i(p_y y + q_z z)}\}$ es una base de funciones (es LI) entonces por unicidad en la escritura

$$A(p_y, q_z) \sinh(k_x a/2) = B(p_y, q_z) \sinh(-k_x a/2). \tag{44}$$

Continuidad en $x = a/2$

$$\Phi_I(x = a/2, y, z) = \Phi_{II}(x = a/2, y, z), \;\forall y, z \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A(p_y, q_z)\sinh(k_x a/2)e^{i(p_y y+q_z z)} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z B(p_y, q_z)\sinh(k_x(a/2 - a))e^{i(p_y y+q_z z)}\end{aligned} \tag{43}$$

como $\{e^{i(p_y y+q_z z)}\}$ es una base de funciones (es LI) entonces por unicidad en la escritura

$$A(p_y, q_z)\sinh(k_x a/2) = B(p_y, q_z)\sinh(-k_x a/2). \tag{44}$$

$$\implies B(p_y, q_z) = -A(p_y, q_z). \tag{45}$$

Problema 7- corte YZ

Usando la condición del **salto en la derivada** tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Sigma^-} - \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Sigma^+} = 4\pi\sigma \tag{46}$$

Problema 7- corte YZ

Usando la condición del **salto en la derivada** tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^-} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^+} = 4\pi\sigma \tag{46}$$

Usando que la normal a la superficie es $\mathrm{n} = \hat{x}$ y que la densidad de carga superficial es $\sigma(y, z) = \lambda\delta(y)$

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial x}|_{x=a/2^-} - \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x}|_{x=a/2^+} = 4\pi\lambda\delta(y) \tag{47}$$

Problema 7- corte YZ

Usando la condición del **salto en la derivada** tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^-} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^+} = 4\pi\sigma \tag{46}$$

Usando que la normal a la superficie es $\mathrm{n} = \hat{x}$ y que la densidad de carga superficial es $\sigma(y, z) = \lambda\delta(y)$

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial x}|_{x=a/2^-} - \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x}|_{x=a/2^+} = 4\pi\lambda\delta(y) \tag{47}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A(p_y, q_z) k_x \cosh(k_x a/2) e^{i(p_y y + q_z z)} \tag{48}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A(p_y, q_z) k_x \cosh(k_x(a - a/2)) e^{i(p_y y + q_z z)} = 4\pi\lambda\delta(y) \tag{49}$$

Usando la condición del **salto en la derivada** tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^-} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^+} = 4\pi\sigma \tag{46}$$

Usando que la normal a la superficie es $\mathrm{n} = \hat{x}$ y que la densidad de carga superficial es $\sigma(y,z) = \lambda\delta(y)$

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial x}|_{x=a/2^-} - \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x}|_{x=a/2^+} = 4\pi\lambda\delta(y) \tag{47}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A(p_y, q_z) k_x \cosh(k_x a/2) e^{i(p_y y + q_z z)} \tag{48}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A(p_y, q_z) k_x \cosh(k_x(a - a/2)) e^{i(p_y y + q_z z)} = 4\pi\lambda\delta(y) \tag{49}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A(p_y, q_z) 2k_x \cosh(k_x a/2) e^{i(p_y y + q_z z)} = 4\pi\lambda\delta(y) \tag{50}$$

Problema 7- corte YZ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(p'_y y + q'_z z)} \times \quad (50) \qquad (51)$$

Problema 7- corte YZ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(p'_y y + q'_z z)} \times \quad (50) \tag{51}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(p'_y y + q'_z z)} \times \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A(p_y, q_z) 2k_x \cosh(k_x a/2) e^{i(p_y y + q_z z)} \tag{52}$$
$$= 4\pi\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(p'_y y + q'_z z)} \delta(y)$$

Problema 7- corte YZ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(p'_y y + q'_z z)} \times \quad (50) \tag{51}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(p'_y y + q'_z z)} \times \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A(p_y, q_z) 2k_x \cosh(k_x a/2) e^{i(p_y y + q_z z)} \tag{52}$$
$$= 4\pi\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(p'_y y + q'_z z)} \delta(y)$$

$$A(p'_y, q'_z) 2k_x \cosh(k_x a/2)(2\pi)^2 = 4\pi\lambda(2\pi)\delta(q'_z) \tag{53}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(p'_y y + q'_z z)} \times \qquad (50) \tag{51}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(p'_y y + q'_z z)} \times \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z A(p_y, q_z) 2k_x \cosh(k_x a/2) e^{i(p_y y + q_z z)} \tag{52}$$
$$= 4\pi\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(p'_y y + q'_z z)} \delta(y)$$

$$A(p'_y, q'_z) 2k_x \cosh(k_x a/2)(2\pi)^2 = 4\pi\lambda(2\pi)\delta(q'_z) \tag{53}$$

$$\boxed{A(p'_y, q'_z) = \frac{\lambda\delta(q'_z)}{k_x \cosh(k_x a/2)}.} \tag{54}$$

Problema 7- corte YZ

Finalmente el potencial resulta ser

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{\lambda\delta(q_z)}{k_x \cosh(k_x a/2)} e^{i(p_y y + q_z z)} \times \begin{cases} \sinh(k_x x) & 0 \leq x < a/2 \\ \sinh(k_x(a-x)) & a/2 < x \leq a \end{cases} \tag{55}$$

Finalmente el potencial resulta ser

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{\lambda \delta(q_z)}{k_x \cosh(k_x a/2)} e^{i(p_y y + q_z z)} \times \begin{cases} \sinh(k_x x) & 0 \leq x < a/2 \\ \sinh(k_x(a-x)) & a/2 < x \leq a \end{cases} \tag{55}$$

$$k_x(p_y, 0) = \sqrt{p_y^2 + 0^2} = p_y \tag{56}$$

Problema 7- corte YZ

Finalmente el potencial resulta ser

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{\lambda\delta(q_z)}{k_x \cosh(k_x a/2)} e^{i(p_y y + q_z z)} \times \begin{cases} \sinh(k_x x) & 0 \leq x < a/2 \\ \sinh(k_x(a-x)) & a/2 < x \leq a \end{cases} \tag{55}$$

$$k_x(p_y, 0) = \sqrt{p_y^2 + 0^2} = p_y \tag{56}$$

$$\boxed{\Phi(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \frac{\lambda}{p_y \cosh(p_y a/2)} e^{ip_y y} \times \begin{cases} \sinh(p_y x) & 0 \leq x < a/2 \\ \sinh(p_y(a-x)) & a/2 < x \leq a \end{cases}} \tag{57}$$

¿Tiene sentido? Dependencias, simetrías, unidades.

Problema 7- corte YZ

$$\boxed{\Phi(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \frac{\lambda}{p_y \cosh(p_y a/2)} e^{ip_y y} \times \begin{cases} \sinh(p_y x) & 0 \leq x < a/2 \\ \sinh(p_y(a-x)) & a/2 < x \leq a \end{cases}} \tag{58}$$

Problema 7- corte YZ

Multiplicando por $\sinh(p_y a/2)$ en el numerador y denominador

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \frac{\lambda}{p_y \cosh(p_y a/2)\sinh(p_y a/2)} e^{ip_y y} \times \begin{cases} \sinh(p_y a/2)\sinh(p_y x) & 0 \leq x < a/2 \\ \sinh(p_y(a-x))\sinh(p_y a/2) & a/2 < x \leq a \end{cases} \tag{59}$$

Problema 7- corte YZ

Multiplicando por $\sinh(p_y a/2)$ en el numerador y denominador

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \frac{\lambda}{p_y \cosh(p_y a/2)\sinh(p_y a/2)} e^{ip_y y} \times \begin{cases} \sinh(p_y a/2)\sinh(p_y x) & 0 \leq x < a/2 \\ \sinh(p_y(a-x))\sinh(p_y a/2) & a/2 < x \leq a \end{cases} \tag{59}$$

definiendo $x_< = \text{mín}(x, a/2)$ y $x_> = \text{máx}(x, a/2)$ y usando $2\cosh(p_y a/2)\sinh(p_y a/2) = \sinh(p_y a)$ tenemos

Multiplicando por $\sinh(p_y a/2)$ en el numerador y denominador

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \frac{\lambda}{p_y \cosh(p_y a/2)\sinh(p_y a/2)} e^{ip_y y} \times \begin{cases} \sinh(p_y a/2)\sinh(p_y x) & 0 \leq x < a/2 \\ \sinh(p_y(a-x))\sinh(p_y a/2) & a/2 < x \leq a \end{cases} \tag{59}$$

definiendo $x_< = \text{mín}(x, a/2)$ y $x_> = \text{máx}(x, a/2)$ y usando $2\cosh(p_y a/2)\sinh(p_y a/2) = \sinh(p_y a)$ tenemos

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \frac{2\lambda}{p_y \sinh(p_y a)} e^{ip_y y} \sinh(p_y x_<)\sinh(p_y(a - x_>)) \tag{60}$$

Igualdad

Ver igualdad de soluciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\lambda}{n} \sin(k_n \frac{a}{2}) \sin(k_n x) e^{-n\pi|y|/a} = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \frac{2\lambda}{p_y \sinh(p_y a)} e^{ip_y y} \sinh(p_y x_<) \sinh(p_y (a - x_>)) \tag{61}$$

Igualdad

Ver igualdad de soluciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\lambda}{n} \sin(k_n \frac{a}{2}) \sin(k_n x) e^{-n\pi|y|/a} = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \frac{2\lambda}{p_y \sinh(p_y a)} e^{ip_y y} \sinh(p_y x_<) \sinh(p_y(a - x_>)) \tag{61}$$

Descomponer el lado de la derecha en una serie de Fourier en X

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(k_n x) \sin(k_m \frac{a}{2}) \frac{4\lambda}{n} e^{-n\pi|y|/a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(k_n x) \phi_n(y) \tag{62}$$

donde

$$\phi_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin(k_n x) \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \frac{2\lambda}{p_y \sinh(p_y a)} e^{ip_y y} \sinh(p_y x_<) \sinh(p_y(a - x_>)) \tag{63}$$

Igualdad

Ver igualdad de soluciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\lambda}{n} \sin(k_n \frac{a}{2}) \sin(k_n x) e^{-n\pi|y|/a} = \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \frac{2\lambda}{p_y \sinh(p_y a)} e^{ip_y y} \sinh(p_y x_<) \sinh(p_y(a - x_>)) \tag{61}$$

Descomponer el lado de la derecha en una serie de Fourier en X

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(k_n x) \sin(k_m \frac{a}{2}) \frac{4\lambda}{n} e^{-n\pi|y|/a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(k_n x) \phi_n(y) \tag{62}$$

donde

$$\phi_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin(k_n x) \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \frac{2\lambda}{p_y \sinh(p_y a)} e^{ip_y y} \sinh(p_y x_<) \sinh(p_y(a - x_>)) \tag{63}$$

$$= 2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dp_y e^{ip_y y} F_n(p_y) \tag{64}$$

siendo

$$F_n(p_y) = \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin(k_n x) \frac{1}{p_y \sinh(p_y a)} \sinh(p_y x_<) \sinh(p_y(a - x_>)) \tag{65}$$

Igualdad

Escribiendo todas las funciones de x en términos de exponenciales e integrando

$$F_n(p_y) = \frac{2/a}{p_y^2 + k_n^2} \sin(k_n a/2) \tag{66}$$

Igualdad

Escribiendo todas las funciones de x en términos de exponenciales e integrando

$$F_n(p_y) = \frac{2/a}{p_y^2 + k_n^2} \sin(k_n a/2) \tag{66}$$

Resta ver que

$$\sin(k_n \frac{a}{2}) \frac{4\lambda}{n} e^{-n\pi|y|/a} = 2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dp_y e^{ip_y y} \frac{2/a}{p_y^2 + k_n^2} \sin(k_n a/2). \tag{67}$$

Igualdad

Escribiendo todas las funciones de x en términos de exponenciales e integrando

$$F_n(p_y) = \frac{2/a}{p_y^2 + k_n^2} \sin(k_n a/2) \tag{66}$$

Resta ver que

$$\sin(k_n \frac{a}{2}) \frac{4\lambda}{n} e^{-n\pi|y|/a} = 2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \, e^{ip_y y} \frac{2/a}{p_y^2 + k_n^2} \sin(k_n a/2). \tag{67}$$

Esto se puede ver usando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{iky}}{k^2 + \omega^2} = \frac{\pi e^{-\omega|y|}}{\omega} \tag{68}$$

(esta transformada de fourier la pueden encontrar en tablas o pensando a la integral sobre k en el plano complejo y resolviendo por residuos)

Simplificacion

Para resolver la serie de Fourier

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}\frac{a}{2})\frac{4\lambda}{n}e^{-n\pi|y|/a} \tag{69}$$

Simplificacion

Para resolver la serie de Fourier

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{a}x) \sin(\frac{n\pi}{a}\frac{a}{2}) \frac{4\lambda}{n} e^{-n\pi|y|/a} \tag{69}$$

escribimos a los senos como exponenciales complejas y definimos

$$\alpha = e^{i\pi(x+a/2)/a}, \quad \beta = e^{i\pi(x-a/2)/a} \quad c = e^{-\pi|y|/a} \tag{70}$$

entonces

$$\Phi = 4\lambda \left\{ \frac{1}{(2i)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[(c\alpha)^n + (c/\alpha)^n - (c\beta)^n - (c/\beta)^n \right] \right\} \tag{71}$$

Simplificacion

Para resolver la serie de Fourier

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}\frac{a}{2})\frac{4\lambda}{n}e^{-n\pi|y|/a} \tag{69}$$

escribimos a los senos como exponenciales complejas y definimos

$$\alpha = e^{i\pi(x+a/2)/a}, \quad \beta = e^{i\pi(x-a/2)/a} \quad c = e^{-\pi|y|/a} \tag{70}$$

entonces

$$\Phi = 4\lambda\left\{\frac{1}{(2i)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[(c\alpha)^n + (c/\alpha)^n - (c\beta)^n - (c/\beta)^n\right]\right\} \tag{71}$$

y usando que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \int dx \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \int dx \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x) \tag{72}$$

Simplificacion

Para resolver la serie de Fourier

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}\frac{a}{2})\frac{4\lambda}{n}e^{-n\pi|y|/a} \tag{69}$$

escribimos a los senos como exponenciales complejas y definimos

$$\alpha = e^{i\pi(x+a/2)/a}, \quad \beta = e^{i\pi(x-a/2)/a} \quad c = e^{-\pi|y|/a} \tag{70}$$

entonces

$$\Phi = 4\lambda\left\{\frac{1}{(2i)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[(c\alpha)^n + (c/\alpha)^n - (c\beta)^n - (c/\beta)^n\right]\right\} \tag{71}$$

y usando que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \int dx \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \int dx \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x) \tag{72}$$

llegamos a

$$\boxed{\Phi = \lambda \ln\left\{\frac{1+e^{-2\pi|y|/a} - 2e^{-\pi|y|/a}\cos\left[\pi(x+a/2)/a\right]}{1+e^{-2\pi|y|/a} - 2e^{-\pi|y|/a}\cos\left[\pi(x-a/2)/a\right]}\right\}} \tag{73}$$

Recordamos: La **función de Green** para el problema de Dirichlet G_D corresponde al problema de una carga puntual de carga unitaria en el interior de un recinto R, es decir,

$$\nabla^2 G_D(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad \vec{x}, \vec{x}' \in R \tag{74}$$

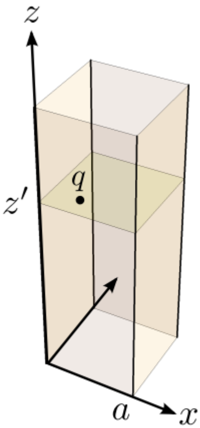
Repaso Función de Green

Recordamos: La **función de Green** para el problema de Dirichlet G_D corresponde al problema de una carga puntual de carga unitaria en el interior de un recinto R, es decir,

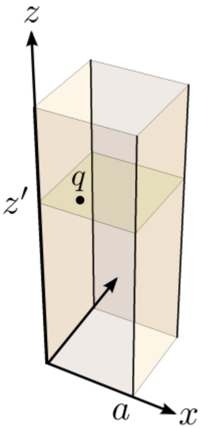
$$\nabla^2 G_D(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad \vec{x}, \vec{x}' \in R \tag{74}$$

$$G_D(\vec{x} \in \partial R, \vec{x}') = 0. \tag{75}$$

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado semi-infinito



Ejercicio 11- Cilindro cuadrado semi-infinito



Geometría del problema: **Cartesianas**.

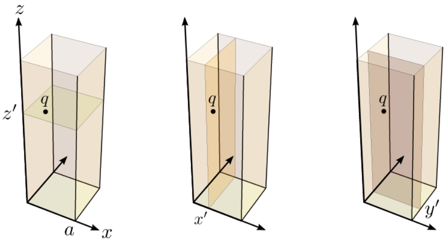
$$G_D((x=0,y,z),\vec{x}') = G_D((x=a,y,z),\vec{x}') = 0$$

$$G_D((x,y=0,z),\vec{x}') = G_D((x,y=a,z),\vec{x}') = 0$$

$$G_D((x,y,z=0),\vec{x}') = 0$$

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado semi-infinito

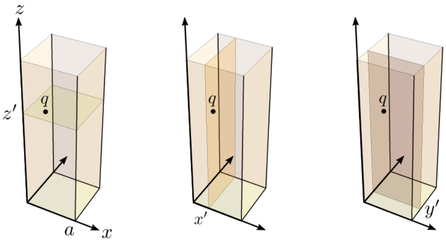
Superficie Σ: $z = z'$ o $x = x'$.



Tomemos $z = z'$.

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado semi-infinito

Superficie Σ: $z = z'$ o $x = x'$.



Tomemos $z = z'$. **Base de soluciones X e Y**:

$$\{\sin(k_n x)\sin(p_m y)\}_{n,m\in\mathbb{N}} \tag{76}$$

con

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad p_m = \frac{m\pi}{a}. \tag{77}$$

para verificar las c.c.

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado semi-infinito

Region I) $0 \leq z < z'$ exponenciales reales y $G_D((x, y, z = 0), \vec{x}') = 0$

$$\{\sinh(q_{nm}z), \cancel{\cosh(q_{nm}z)}\}_{n,m\in\mathbb{N}}, \tag{78}$$

con $q_{nm} = \sqrt{k_n^2 + p_n^2}$.

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado semi-infinito

Region I) $0 \leq z < z'$ exponenciales reales y $G_D((x, y, z = 0), \vec{x}') = 0$

$$\{\sinh(q_{nm}z), \cancel{\cosh(q_{nm}z)}\}_{n,m\in\mathbb{N}}, \tag{78}$$

con $q_{nm} = \sqrt{k_n^2 + p_n^2}$.

Region II) $z' < z$ exponenciales reales y $G_D(z \to \infty) < \infty$

$$\{e^{-q_{nm}z}, \cancel{e^{q_{nm}z}}\}_{n,m\in\mathbb{N}}. \tag{79}$$

Poniendo todo junto el potencial es de la forma

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \begin{cases} \Phi_I = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \sin(k_n x) \sin(p_m y) \sinh(q_{nm}z) & , 0 \leq z < z' \\ \Phi_{II} = \sum_{n,m=0}^{\infty} B_{nm} \sin(k_n x) \sin(p_m y) e^{-q_{nm}z} & , z' < z \end{cases} . \tag{80}$$

Continuidad: La podemos asegurar tomando

$$G_D(\vec{x},\vec{x}') = \begin{cases} \Phi_I = \sum_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}\sin(k_n x)\sin(p_m y)\sinh(q_{nm}z)e^{-q_{nm}z'} & ,0 \leq z < z' \\ \Phi_{II} = \sum_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}\sin(k_n x)\sin(p_m y)\sinh(q_{nm}z')e^{-q_{nm}z} & ,z' < z \end{cases} . \tag{81}$$

Noten que $\Phi_I(z = z') = \Phi_{II}(z = z')$.

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado semi-infinito

Salto de la derivada:

$$\frac{\partial G_D}{\partial \mathsf{n}}|_{\Sigma^-} - \frac{\partial G_D}{\partial \mathsf{n}}|_{\Sigma^+} = 4\pi\sigma \tag{82}$$

Salto de la derivada:

$$\frac{\partial G_D}{\partial \mathsf{n}}|_{\Sigma^-} - \frac{\partial G_D}{\partial \mathsf{n}}|_{\Sigma^+} = 4\pi\sigma \tag{82}$$

$$\mathsf{n} = \hat{z}, \quad \sigma(x, y) = \delta(x - x')\delta(y - y')$$

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}|_{z=z'} - \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z}|_{z=z'} = 4\pi\delta(x - x')\delta(y - y') \tag{83}$$

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado semi-infinito

Salto de la derivada:

$$\frac{\partial G_D}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^-} - \frac{\partial G_D}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^+} = 4\pi\sigma \tag{82}$$

$$\mathrm{n} = \hat{z}, \quad \sigma(x,y) = \delta(x-x')\delta(y-y')$$

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}|_{z=z'} - \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z}|_{z=z'} = 4\pi\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{83}$$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}\sin(k_n x)\sin(p_m y) q_{nm}\cosh(q_{nm}z')e^{-q_{nm}z'} \tag{84}$$

$$-\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}\sin(k_n x)\sin(p_m y)(-q_{nm})\sinh(q_{nm}z')e^{-q_{nm}z'} = 4\pi\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{85}$$

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado semi-infinito

Salto de la derivada:

$$\frac{\partial G_D}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^-} - \frac{\partial G_D}{\partial \mathrm{n}}|_{\Sigma^+} = 4\pi\sigma \tag{82}$$

$$\mathrm{n} = \hat{z}, \quad \sigma(x,y) = \delta(x-x')\delta(y-y')$$
$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}|_{z=z'} - \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z}|_{z=z'} = 4\pi\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{83}$$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}\sin(k_n x)\sin(p_m y)q_{nm}\cosh(q_{nm}z')e^{-q_{nm}z'} \tag{84}$$

$$-\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}\sin(k_n x)\sin(p_m y)(-q_{nm})\sinh(q_{nm}z')e^{-q_{nm}z'} = 4\pi\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{85}$$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}\sin(k_n x)\sin(p_m y)2q_{nm}\left[\cosh(q_{n'm'}z') + \sinh(q_{n'm'}z')\right]e^{-q_{nm}z'} = 4\pi\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{86}$$

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado semi-infinito

$$\int_0^a dx \sin(k_{n'} x) \int_0^a dy \sin(q_{m'} y) \times \quad (86) \qquad (87)$$

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado semi-infinito

$$\int_0^a dx \sin(k_{n'} x) \int_0^a dy \sin(q_{m'} y) \times \quad (86) \tag{87}$$

$$C_{n' m'} \left(\frac{a}{2}\right)^2 q_{n' m'} \left[\cosh(q_{n' m'} z') + \sinh(q_{n' m'} z')\right] e^{-q_{n' m'} z'} = 4\pi \sin(k_{n'} x') \sin(p_{m'} y') \tag{88}$$

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado semi-infinito

$$\int_0^a dx \sin(k_{n'} x) \int_0^a dy \sin(q_{m'} y) \times \quad (86) \tag{87}$$

$$C_{n'm'} \left(\frac{a}{2}\right)^2 q_{n'm'} \left[\cosh(q_{n'm'} z') + \sinh(q_{n'm'} z')\right] e^{-q_{n'm'} z'} = 4\pi \sin(k_{n'} x') \sin(p_{m'} y') \tag{88}$$

$$C_{n'm'} = \left(\frac{2}{a}\right)^2 4\pi \frac{\sin(k_{n'} x') \sin(p_{m'} y')}{q_{n'm'}} \tag{89}$$

Reemplazando obtenemos

$$G_D = \sum_{n,m=0}^{\infty} \sin(k_n x) \sin(p_m y) \left(\frac{2}{a}\right)^2 4\pi \frac{\sin(k_n x') \sin(p_m y')}{q_{nm}} \times \begin{cases} \sinh(q_{nm} z) e^{-q_{nm} z'} & , 0 \leq z < z' \\ \sinh(q_{nm} z') e^{-q_{nm} z} & , z' < z \end{cases} \tag{90}$$

$$\int_0^a dx \sin(k_{n'} x) \int_0^a dy \sin(q_{m'} y) \times \quad (86) \tag{87}$$

$$C_{n'm'} \left(\frac{a}{2}\right)^2 q_{n'm'} \left[\cosh(q_{n'm'} z') + \sinh(q_{n'm'} z')\right] e^{-q_{n'm'} z'} = 4\pi \sin(k_{n'} x') \sin(p_{m'} y') \tag{88}$$

$$C_{n'm'} = \left(\frac{2}{a}\right)^2 4\pi \frac{\sin(k_{n'} x') \sin(p_{m'} y')}{q_{n'm'}} \tag{89}$$

Reemplazando obtenemos

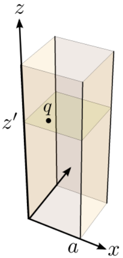
$$G_D = \sum_{n,m=0}^{\infty} \sin(k_n x) \sin(p_m y) \left(\frac{2}{a}\right)^2 4\pi \frac{\sin(k_n x') \sin(p_m y')}{q_{nm}} \times \begin{cases} \sinh(q_{nm} z) e^{-q_{nm} z'} & , 0 \leq z < z' \\ \sinh(q_{nm} z') e^{-q_{nm} z} & , z' < z \end{cases} \tag{90}$$

$$\boxed{G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{n,m=0}^{\infty} \sin(k_n x) \sin(p_m y) \left(\frac{2}{a}\right)^2 4\pi \frac{\sin(k_n x') \sin(p_m y')}{q_{nm}} \sinh(q_{nm} z_<) e^{-q_{nm} z_>}} \tag{91}$$

con $z_< = \text{mín}(z, z')$, $z_> = \text{máx}(z, z')$.¿Tiene sentido? Dependencias, simetrías, unidades.

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado infinito

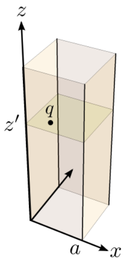
Cilindro cuadrado infinito, mismas condiciones que el anterior pero sin $G_D(z=0)=0$.



Tomemos la superficie $z=z'$.

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado infinito

Cilindro cuadrado infinito, mismas condiciones que el anterior pero sin $G_D(z=0)=0$.



Tomemos la superficie $z=z'$.

Base de soluciones X e Y:

$$\{\sin(k_n x)\sin(p_m y)\}_{n,m\in\mathbb{N}} \tag{92}$$

con

$$k_n=\frac{n\pi}{a},\quad p_m=\frac{m\pi}{a}. \tag{93}$$

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado infinito

Soluciones en z:

Region I) $z < z'$ exponenciales reales y $G_D(z \to -\infty) < \infty$

$$\{\cancel{e^{-q_{nm}z}}, e^{q_{nm}z}\}_{n,m \in \mathbb{N}}, \tag{94}$$

con $q_{nm} = \sqrt{k_n^2 + p_n^2}$.

Soluciones en z:

Region I) $z < z'$ exponenciales reales y $G_D(z \to -\infty) < \infty$

$$\{\cancel{e^{-q_{nm}z}}, e^{q_{nm}z}\}_{n,m\in\mathbb{N}}, \tag{94}$$

con $q_{nm} = \sqrt{k_n^2 + p_n^2}$.

Region II) $z' < z$ exponenciales reales y $G_D(z \to +\infty) < \infty$

$$\{e^{-q_{nm}z}, \cancel{e^{q_{nm}z}}\}_{n,m\in\mathbb{N}}. \tag{95}$$

Poniendo todo junto el potencial es de la forma

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \begin{cases} \Phi_I = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \sin(k_n x) \sin(p_m y) e^{q_{nm}z} & , z < z' \\ \Phi_{II} = \sum_{n,m=0}^{\infty} B_{nm} \sin(k_n x) \sin(p_m y) e^{-q_{nm}z} & , z' < z \end{cases}. \tag{96}$$

Continuidad:

$$G_D(\vec{x},\vec{x}') = \begin{cases} \Phi_I = \sum_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}\sin(k_n x)\sin(p_m y)e^{-q_{nm}z'}e^{q_{nm}z} & ,z<z' \\ \Phi_{II} = \sum_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}\sin(k_n x)\sin(p_m y)e^{-q_{nm}z}e^{q_{nm}z'} & ,z'<z \end{cases} \tag{97}$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}\sin(k_n x)\sin(p_m y)e^{-q_{nm}|z-z'|}.$$

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado infinito

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}\Big|_{z=z'} - \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z}\Big|_{z=z'} = 4\pi\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{98}$$

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado infinito

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}\big|_{z=z'} - \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z}\big|_{z=z'} = 4\pi\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{98}$$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}\sin(k_n x)\sin(p_m y)2q_{nm}\cancel{e^{-q_{nm}|z'-z'|}} = 4\pi\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{99}$$

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado infinito

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}\Big|_{z=z'} - \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z}\Big|_{z=z'} = 4\pi\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{98}$$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}\sin(k_n x)\sin(p_m y)2q_{nm}\cancel{e^{-q_{nm}|z'-z'|}} = 4\pi\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{99}$$

$$\int_0^a dx \sin(k_{n'}x)\int_0^a dy \sin(q_{m'}y) \times \quad (99) \tag{100}$$

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado infinito

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}\Big|_{z=z'} - \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z}\Big|_{z=z'} = 4\pi\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{98}$$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}\sin(k_n x)\sin(p_m y) 2q_{nm} \cancel{e^{-q_{nm}|z'-z'|}} = 4\pi\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{99}$$

$$\int_0^a dx \sin(k_{n'}x) \int_0^a dy \sin(q_{m'}y) \times \quad (99) \tag{100}$$

$$C_{n'm'}\left(\frac{a}{2}\right)^2 2q_{n'm'} = 4\pi \sin(k_{n'}x')\sin(p_{m'}y') \tag{101}$$

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado infinito

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}|_{z=z'} - \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z}|_{z=z'} = 4\pi\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{98}$$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{nm}\sin(k_n x)\sin(p_m y) 2q_{nm}\cancel{e^{-q_{nm}|z'-z'|}} = 4\pi\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{99}$$

$$\int_0^a dx \sin(k_{n'}x)\int_0^a dy \sin(q_{m'}y) \times \quad (99) \tag{100}$$

$$C_{n'm'}\left(\frac{a}{2}\right)^2 2q_{n'm'} = 4\pi \sin(k_{n'}x')\sin(p_{m'}y') \tag{101}$$

$$\boxed{C_{n'm'} = \left(\frac{2}{a}\right)^2 2\pi \frac{\sin(k_{n'}x')\sin(p_{m'}y')}{q_{n'm'}}} \tag{102}$$

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado infinito

Reemplazando el potencial resulta

$$\boxed{G_D(\vec{x},\vec{x}') = \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^2 2\pi \frac{\sin(k_n x')\sin(p_m y')}{q_{nm}} \sin(k_n x)\sin(p_m y) e^{-q_{nm}|z-z'|}.} \tag{103}$$

¿Tiene sentido? Dependencias, simetrías, unidades.

Ejercicio 11- Cilindro cuadrado infinito

También podemos obtener la función del cilindro cuadrado semi-infinito a partir de la función de Green del cilindro cuadrado infinito usando el método de imágenes