Problema 2. Incidencia TE:

(c) *Para $\theta_1 = 0$, calcular el* **promedio temporal** *de los vectores de Poynting,*

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\,,$$

en los tres medios y verificar que son iguales. El cálculo de $\mathbf{S}$ (flujo de energía por unidad de tiempo y por unidad de area) es no lineal en los campos, por lo que habría que usar las expresiones reales antes de multiplicarlos. Como necesitamos calcular el promedio temporal podemos usar la siguiente propiedad:

Dados $A(t) = \mathbb{R}\mathrm{e}[\mathbb{A}e^{-i\omega t}]$ y $B(t) = \mathbb{R}\mathrm{e}[\mathbb{B}e^{-i\omega t}]$, el promedio temporal en un número entero de períodos $T = 2\pi/\omega$ es

$$\langle AB\rangle \equiv \langle AB\rangle_T = \frac{1}{2}\;\mathbb{R}\mathrm{e}[\mathbb{A}\,\mathbb{B}^*]$$

Entonces en el medio 1:

$$\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r})\rangle = \frac{c}{8\pi}\;\mathbb{R}\mathrm{e}\left[\Big(\overbrace{\mathbb{E}_1^+(\mathbf{r})}^{\hat{x}\,E_1^+ e^{i\mathbf{k}_1^+\cdot\mathbf{r}}} + \underbrace{\mathbb{E}_1^-(\mathbf{r})}_{\hat{x}\,E_1^- e^{i\mathbf{k}_1^-\cdot\mathbf{r}}}\Big) \times \overbrace{\Big(\mathbb{H}_1^+(\mathbf{r}) + \mathbb{H}_1^-(\mathbf{r})\Big)^*}^{\text{expresión compleja}}\right]$$

usando que para ondas planas $\mathbf{H} = (n/\mu)\,\hat{k}\times\mathbf{E}$, y que $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$, se llega a que

$$\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r})\rangle = \frac{c}{8\pi}\frac{n_1}{\mu_1}\left(|E_1^+|^2\hat{k}_1^+ + |E_1^-|^2\hat{k}_1^- + \text{ otros términos de interferencia } (\sim \sin\theta_1)\right)$$

donde los términos de interferencia corresponden, en general, a la superposición constructiva y destructiva de las dos ondas que se propagan en el medio. Como nos interesa el caso de incidencia normal $\hat{k}_1^+ = -\hat{k}_1^- = \hat{z}$, obtenemos

$$\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r})\rangle = \frac{c\,n_1}{8\pi\mu_1}\left(1 - |R|^2\right)E_i^2\,\hat{z}\,.$$

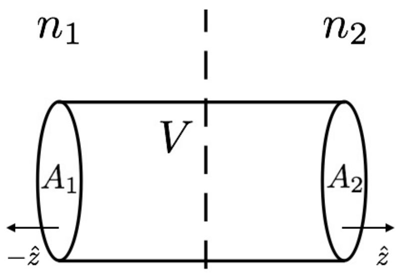
La energía fluye en dirección $\hat{z}$ y, en promedio, es la misma en cada punto del medio 1. En el medio 3, el cálculo del promedio temporal del vector de Poynting es mas sencillo pues sólo tenemos onda transmitida y no hay superposición de ondas, esto es

$$\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r})\rangle = \frac{c\,n_3}{8\pi\mu_3}|T|^2E_i^2\,\hat{z}$$

Queda para ustedes el cálculo explícito del vector de Poynting promediado en el medio 2. Los tres deben coincidir: $\langle\mathbf{S}_1\rangle = \langle\mathbf{S}_2\rangle = \langle\mathbf{S}_3\rangle$, ya que el flujo de energía electromagnética promedio medido a cada lado de cada interfase es el mismo al tratarse de un problema estacionario sin disipación. Para demostrar esto sin calcular la triple igualdad de arriba explícitamente hay que mirar el balance de energía (*teorema de Poynting*) promediado:

$$\langle\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathrm{V}} d^3r\;u\right)\rangle + \langle\int_{\mathrm{V}} d^3r\;\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,\rangle = -\,\langle\oint_{\mathrm{A}=\partial\mathrm{V}} d^2r\;\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}\,\rangle$$

dónde la densidad de energía es $u = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})$. No hay disipación por efecto Joule ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$), y no hay variación de la energía electromagnética promediada en un período (por ser un problema periódico). Tomando, por ejemplo, un volumen cilíndrico V de tapas A_1 y A_2 con normales $\mp\hat{z}$ en el medio 1 y 2 respectivamente, como muestra la figura, se tiene $0 = (\langle\mathbf{S}_1\rangle\,A_1 - \langle\mathbf{S}_2\rangle\,A_2)\cdot\hat{z}$.



Por otro lado, si se quiere mostrar explícitamente que $\langle \mathbf{S}_1 \rangle = \langle \mathbf{S}_2 \rangle = \langle \mathbf{S}_3 \rangle$ hay que usar las expresiones de R y T en el problema de dos interfases y los coeficientes de Fresnel R_{ij} y T_{ij} en incidencia normal (usar la relación $1 - R_{ij}^2 = T_{ij}T_{ji}$).

(d) *Para $\theta_1 = 0$, ¿qué condición deben cumplir d y los ϵ_i para que no haya onda reflejada en el medio 1?*
Para responder debemos mirar el coeficiente R calculado en el ítem (b):

$$R \equiv \frac{E_1^-}{E_1^+}\Big|_{\mu_i=1;\theta_1=0} = \frac{n_2(n_1 - n_3)\cos\alpha_2 + i(n_2^2 - n_1 n_3)\sin\alpha_2}{n_2(n_1 + n_3)\cos\alpha_2 - i(n_2^2 + n_1 n_3)\sin\alpha_2}$$

y anular la parte real y la parte imaginaria, esto es:

$$n_2(n_1 - n_3)\cos\alpha_2 = 0$$
$$(n_2^2 - n_1 n_3)\sin\alpha_2 = 0$$

Para anularlas encontramos 3 soluciones:

$(0)\qquad n_1 = n_3 \quad , \quad n_2^2 = n_1 n_3$: en este caso no hay interfases

$$(i)\qquad \boxed{n_1 = n_3 \quad , \quad \sin\alpha_2 = 0} \quad \Longrightarrow \alpha_2 \equiv k_2 d = m\pi \Longrightarrow m\lambda_2 = 2d\,, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$(ii)\qquad \boxed{\cos\alpha_2 = 0 \quad , \quad n_2^2 = n_1 n_3} \quad \Longrightarrow \alpha_2 \equiv k_2 d = (2m-1)\pi/2 \Longrightarrow (2m-1)\lambda_2 = 4d\,, \quad m \in \mathbb{N}$$

El caso (i) se corresponde con una onda que en su viaje de ida y vuelta por el medio de espesor d acumula una fase $2\alpha_2 = 2m\pi$. La onda reflejada total E_1^- se compone esencialmente de dos partes: una es la reflexión directa de $1 \to 2$ y otra es la que viaja por el medio 2 se refleja $2 \to 3$ y sale nuevamente hacia el medio 1. En este caso, en alguna de las reflexiones se producirá una fase extra de π -ya sea la que se produce en $1 \to 2$, o la de $2 \to 3$ (que se obtiene por tener $n_{inc} < n_{tran}$ en el caso TE; mirar el cambio de signo en el coeficiente de Fresnel R_{ij}^{TE})-. El desfasaje neto de medio ciclo (π) entre la parte de la onda reflejada que va y vuelve por el medio 2 y la que se refleja directamente en 1 (sin entrar a 2) es responsable de la cancelación de la onda reflejada neta E_1^-. El caso (ii) se puede entender de la misma manera pero involucrando un número par de fases π obtenidas por reflexión, dado que la fase acumulada en el viaje de ida y vuelta en este caso es siempre de medio ciclo.

Pidiendo, en cambio, $|R| = 1$ se puede obtener el efecto inverso; interferencia constructiva de las ondas reflejadas que vuelven hacia el medio 1 y cancelación de la onda transmitida hacia 3. Este efecto es el conocido como ojo de pez, u ojo de gato, de los retroreflectores.