FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2023

GUÍA 5 - ONDAS PLANAS: PROPAGACIÓN EN MEDIOS L.I.H. CON INTERFASES

Ecuaciones de Maxwell en medios lineales isótropos y homogéneos sin fuentes libres (ρ_ℓ, $\mathbf{j}_\ell$):

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\, \mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu\, \mathbf{H}$$

Se obtienen ecuaciones de ondas vectoriales en 3 dimensiones (en ausencia de fuentes externas):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0 \\ n &= \sqrt{\mu\epsilon} \quad : \text{índice de refracción} \end{aligned}$$

Trabajamos con soluciones de ondas planas de frecuencia angular ω:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathbb{R}\mathrm{e}\left[E \quad e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad \hat{v}_E \right] \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathbb{R}\mathrm{e}\left[B \quad e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad \hat{v}_B \right] \end{aligned} \quad ; \quad E, B \in \mathbb{C}, \quad \hat{v}_j\text{: versores (asociado a polarizaión)}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

- Trabajamos con los campos complejos y tomamos parte real al final del cálculo, o en la instancia donde sea necesario; por ejemplo, si aparece una operación que no sea lineal en los campos **E** y/o **B**.
- A partir de acá llamamos **E** y **B** a la versión compleja de los campos.

Vector (número) de onda: $\mathbf{k} = k\,\hat{k} \qquad \Longrightarrow \qquad k^2 = n^2\omega^2/c^2,$
Relación de dispersión: $k = \frac{n}{c}\,\omega$

Propiedades:

- $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0}$
- $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0}$
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\mathbf{k}\times\mathbf{E} = \frac{\omega}{c}\,\mathbf{B}}$ (Para ondas planas con $n = \sqrt{\mu\epsilon}$, queda: $\mathbf{B} = n\,\hat{k}\times\mathbf{E}$)
- Las superficies de *fase* ϕ constante a un tiempo dado, $\phi|_{t_0} \equiv k_x x + k_y y + k_z z - \omega t_0 = cte$, son planos perpendiculares a la dirección de propagación $\hat{k} = (k_x\,\hat{x} + k_y\,\hat{y} + k_z\,\hat{z})/k$.

Condiciones en una interfase

Consideramos una superficie plana que separa a un medio (1) de un medio (2) en donde entran y salen ondas planas que se reflejan y refractan según la Ley de Snell.

Condiciones cinemáticas en la interfase (con normal $\hat{n}$):

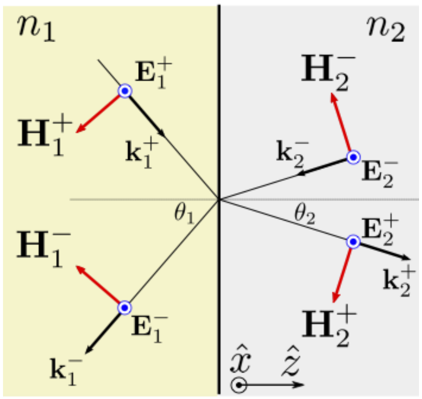
$$\begin{array}{rll} \text{mismas frecuencias:} & \omega_1 \equiv \omega \equiv \omega_2 & \\ \mathbf{k}\ \text{coplanares:} & k_{1\parallel} = k_{2\parallel} & (\text{si } \hat{n} = \hat{z} : k_{1xy} = k_{2xy}) \\ \text{Ley de Snell:} & n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 & \theta_i \text{ ángulo de incidencia} \end{array}$$

Condiciones dinámicas en la interfase:

$$\begin{array}{rcll} [\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1] \cdot \hat{\mathbf{n}} & = & 0 & : \text{continuidad de } \mathbf{D} \text{ normal (en ausencia de } \sigma_\ell) \\ [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] \times \hat{\mathbf{n}} & = & 0 & : \text{continuidad de } \mathbf{E} \text{ tangencial} \\ [\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1] \cdot \hat{\mathbf{n}} & = & 0 & : \text{continuidad de } \mathbf{B} \text{ normal} \\ [\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] \times \hat{\mathbf{n}} & = & 0 & : \text{continuidad de } \mathbf{H} \text{ tangencial (en ausencia de } \mathbf{g}_\ell) \end{array}$$

Polarización Trasverso Eléctrico (TE): el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia (Plano de incidencia: el plano definido por los $\hat{k}$)

$$\mathbf{E}_1^{\pm}(\mathbf{r},t) = E_1^{\pm}\, e^{i(\mathbf{k}_1^{\pm}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{x}$$



$$\mathbf{E}_2^{\pm}(\mathbf{r},t) = E_2^{\pm}\, e^{i(\mathbf{k}_2^{\pm}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\hat{x}$$

continuidad de **D** normal: $\quad$ *trivial* (misma polarización)

continuidad de **E** tangencial: $\quad \boxed{E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^-}$

continuidad de **B** normal:

$$\sin\theta_1\left(B_1^+ + B_1^-\right) = \sin\theta_2\left(B_2^+ + B_2^-\right) \quad \Longrightarrow$$

$$n_1\,\sin\theta_1\left(E_1^+ + E_1^-\right) = n_2\,\sin\theta_2\left(E_2^+ + E_2^-\right) \quad (\equiv \text{Ley Snell + cont. } E_{tan})$$

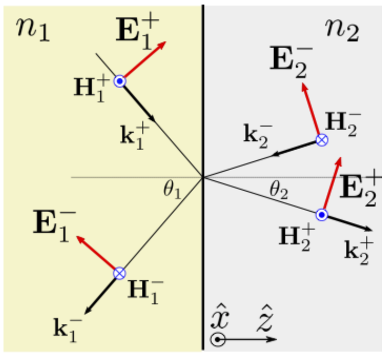
continuidad de **H** tangencial:

$$\cos\theta_1\left(H_1^+ - H_1^-\right) = \cos\theta_2\left(H_2^+ - H_2^-\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{\bar{n}_1\,\left(E_1^+ - E_1^-\right) = \bar{n}_2\left(E_2^+ - E_2^-\right)} \quad ; \quad \bar{n}_i \equiv \frac{n_i \cos\,\theta_i}{\mu_i}$$

[el sistema requiere conocer 2 amplitudes para ser compatible y determinado: Por ejemplo, la incidencia desde un lado y desde el otro de la interfase (E_1^+ y E_2^-).]

Caso Trasverso Magnético (TM): el campo magnético es perpendicular al plano de incidencia.



continuidad de **D** normal: $\epsilon_1 \sin\theta_1 \left(E_1^+ - E_1^-\right) = \epsilon_2 \sin\theta_2 \left(E_2^+ - E_2^-\right)$: Ley Snell + cont. H_{tan}

continuidad de **E** tangencial: $\cos\,\theta_1 \left(E_1^+ + E_1^-\right) = \cos\,\theta_2 \left(E_2^+ + E_2^-\right) \Longrightarrow$

$$\boxed{\left(\tilde{E}_1^+ + \tilde{E}_1^-\right) = \left(\tilde{E}_2^+ + \tilde{E}_2^-\right)} \quad ; \quad \tilde{E}_i \equiv E_i \cos\,\theta_i$$

continuidad de **B** normal: $trivial$ (misma polarización)

continuidad de **H** tangencial: $H_1^+ - H_1^- = H_2^+ - H_2^- \Longrightarrow$

$$\boxed{\tilde{n}_1 \left(\tilde{E}_1^+ - \tilde{E}_1^-\right) = \tilde{n}_2 \left(\tilde{E}_2^+ - \tilde{E}_2^-\right)} \quad ; \quad \tilde{n}_i \equiv \frac{n_i}{\mu_i \cos\,\theta_i}$$

[+ condiciones de borde (para quedar determinado)]

Problema 1. Coeficientes de Fresnel

Encontrar las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas en el problema de una interfase entre dos dieléctricos para incidencia TE y TM.

Caso incidencia TE:

Amplitudes: incidente $E_i = E_1^+$, reflejada $E_r = E_1^-$, transmitida $E_t = E_2^+$ y, condición en el borde (infinito) del medio 2, $E_2^- = 0$.

continuidad de **E** tangencial: $E_1^+ + E_1^- = E_2^+$

continuidad de **H** tangencial: $\bar{n}_1 \left(E_1^+ - E_1^-\right) = \bar{n}_2\, E_2^+ \quad ; \quad \bar{n}_i \equiv \dfrac{n_i \cos\,\theta_i}{\mu_i}$

$$\Longrightarrow \quad \text{Coeficientes de Fresnel (TE)} \quad \begin{cases} R_{12} \equiv \dfrac{E_r}{E_i} = \dfrac{\bar{n}_1 - \bar{n}_2}{\bar{n}_1 + \bar{n}_2} \\[2ex] T_{12} \equiv \dfrac{E_t}{E_i} = \dfrac{2\,\bar{n}_1}{\bar{n}_1 + \bar{n}_2} \end{cases}$$

<u>Caso incidencia TM</u>:

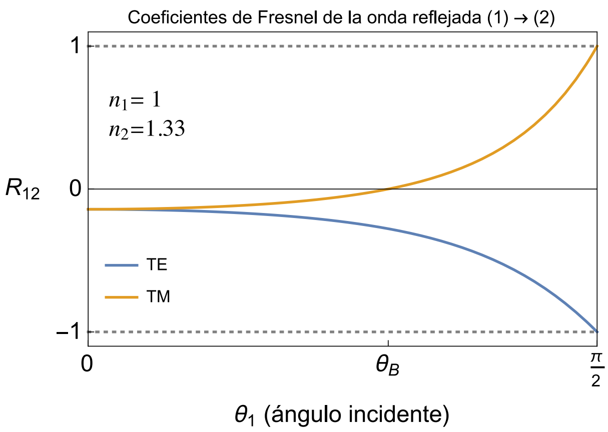
Amplitudes: incidente $E_i = E_1^+$, reflejada $E_r = E_1^-$, transmitida $E_t = E_2^+$ y, condición en el borde (infinito) del medio 2, $E_2^- = 0$.

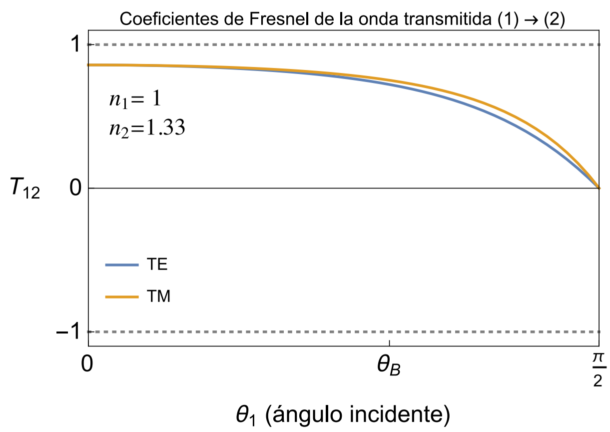
$$\text{continuidad de } \mathbf{E} \text{ tangencial:} \qquad \left(\tilde{E}_1^+ + \tilde{E}_1^-\right) = \tilde{E}_2^+ \qquad ; \qquad \tilde{E}_i \equiv E_i \cos\,\theta_i$$

$$\text{continuidad de } \mathbf{H} \text{ tangencial:} \quad \tilde{n}_1 \left(\tilde{E}_1^+ - \tilde{E}_1^-\right) = \tilde{n}_2\,\tilde{E}_2^+ \quad ; \quad \tilde{n}_i \equiv \frac{n_i}{\mu_i \cos\,\theta_i}$$

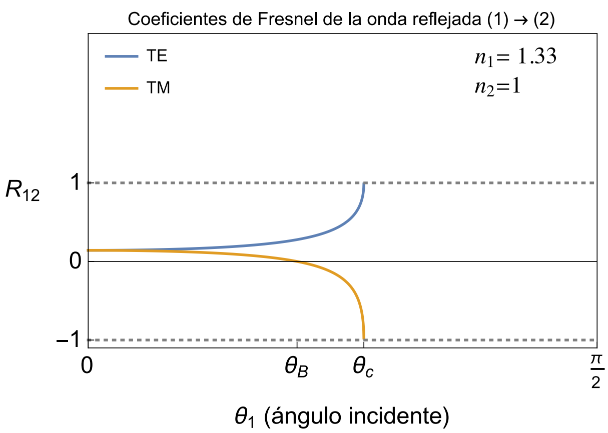
$$\Longrightarrow \quad \text{Coeficientes de Fresnel (TM)} \quad \begin{cases} R_{12} \equiv \dfrac{E_r}{E_i} = \dfrac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \\[2ex] T_{12} \equiv \dfrac{E_t}{E_i} = \dfrac{2\,\tilde{n}_1}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \left(\dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right) \end{cases}$$

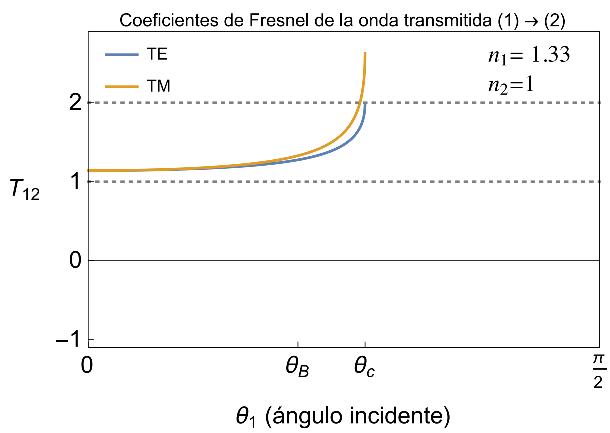
De menor a mayor densidad:





De mayor a menor densidad:





Casos especiales:

(i) $R_{12}^{TM} = 0 \Longrightarrow$ Ángulo de Brewster θ_B,

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_2}{n_1}$$

tal que si $\theta_1 = \theta_B$ no hay onda reflejada con polarización TM.

(ii) Reflexión total interna para $\theta_1 \geq \theta_c$, con el ángulo crítico θ_c tal que $\sin(\theta_c) = n_2/n_1$.

$$\Longrightarrow \cos\theta_2 = i\sqrt{(n_1 \sin\theta_1/n_2)^2 - 1}$$

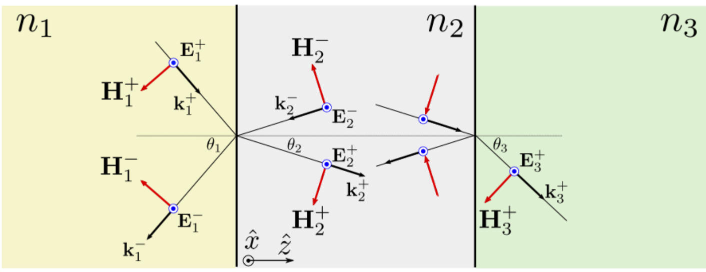
No hay flujo del valor medio del vector de Poynting en la dirección perpendicular a la interfase: $\hat{z} \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle = 0$

Problema 2. Las dos interfases

Una lámina dieléctrica de permitividad ϵ_2 y espesor d separa dos medios semiinfinitos que tienen permitividades ϵ_1 y ϵ_3 ($\mu = 1$ en todo el espacio). Una onda plana de amplitud E_i incide sobre la interfase que separa los medios 1 y 2, formando un ángulo θ_1 con la normal.

(a) *(Considerar por separado los casos TE y TM.)*

Caso incidencia TE:



$z = 0$ $\qquad$ $z = d$

$$\mathbf{E}_1^{\pm}(\mathbf{r},t) = \mathbb{R}\text{e}[\, E_1^{\pm}\, e^{i(\mathbf{k_1^{\pm}}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}]\,\hat{x} \quad ; \qquad E_1^{+} \equiv E_i$$

$$\mathbf{E}_2^{\pm}(\mathbf{r},t) = \mathbb{R}\text{e}[\, E_2^{\pm}\, e^{i(\mathbf{k_2^{\pm}}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}]\,\hat{x}$$

$$\mathbf{E}_3^{+}(\mathbf{r},t) = \mathbb{R}\text{e}[\, E_3^{+}\, e^{i(\mathbf{k_3^{+}}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}]\,\hat{x} \quad ; \qquad E_3^{-} = 0$$

En la segunda interfase ($z = d$) tenemos:

$$\mathbf{E}_2^{\pm}(\mathbf{r},t)\Big|_{z=d} = E_2^{\pm}\, e^{\pm\, i\alpha_2}\, e^{i(\mathbf{k_2^{\pm}}\cdot\vec{\rho}-\omega t)}\hat{x} \quad ; \qquad \alpha_2 \equiv d\, k_2\, \cos\theta_2\ ,\ \vec{\rho} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$$

$$\mathbf{E}_3(\mathbf{r},t)\Big|_{z=d} = \underbrace{E_3^{+}\, e^{\,i\alpha_3}}_{\equiv\ E_t}\ e^{i(\mathbf{k_3^{+}}\cdot\vec{\rho}-\omega t)}\hat{x} \quad ; \qquad \alpha_3 \equiv d\, k_3^{+}\, \cos\theta_3$$

En la segunda interfase los campos tienen desfasajes (α_i) por la propagación en el medio de espesor d. Por comodidad vamos a definir la magnitud E_t para la parte transmitida, para no arrastrar el factor con α_3 en todas las ecuaciones.

Sistema de ecuaciones que determina todos los campos:

En la interfase $z = 0$ (miro el planteo TE general, que ya hicimos antes):

continuidad de **E** tangencial: $\qquad E_1^{+} + E_1^{-} = E_2^{+} + E_2^{-}$

continuidad de **H** tangencial: $\quad \bar{n}_1\, \left(E_1^{+} - E_1^{-}\right) = \bar{n}_2\, \left(E_2^{+} - E_2^{-}\right) \quad ; \quad \bar{n}_i \equiv \dfrac{n_i \cos\ \theta_i}{\mu_i}$

En la interfase $z = d$ (planteo problema 1, pero con el desfasaje):

$$\text{continuidad de } \mathbf{E} \text{ tangencial:} \qquad E_2^+ e^{i\alpha_2} + E_2^- e^{-i\alpha_2} = E_t$$

$$\text{continuidad de } \mathbf{H} \text{ tangencial:} \quad \bar{n}_2 \left(E_2^+ e^{i\alpha_2} - E_2^- e^{-i\alpha_2} \right) = \bar{n}_3 \, E_t$$

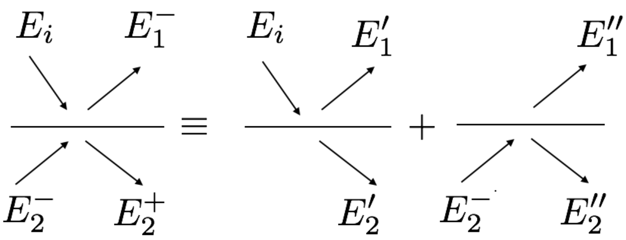
Resolución del sistema de ecuaciones para los campos: 4 ecs. con 4 incógnitas.

(b) *Método alternativo y mucho más práctico* (seguimos con el caso TE) : primero, notar que en la segunda interfase el problema involucra sólo tres ondas, de manera que las amplitudes están relacionadas por los coeficientes de transmisión y reflexión usuales, T_{23} y R_{23}, esto es:

$$E_t = T_{23} \, E_2^+ e^{i\alpha_2} \tag{1}$$

$$E_2^- e^{-i\alpha_2} = R_{23} \, E_2^+ e^{i\alpha_2} \tag{2}$$

Vemos que esto directamente elimina dos incógnitas, pero cuidado con las fases. Por otro lado, en la primera interfase descomponemos el problema como la superposición[*] de dos problemas de tres ondas, con una onda incidente a cada lado de la interfase. El dibujo:



$$E_1^- = E_1' + E_1'' = R_{12} \, E_i + T_{21} E_2^- \tag{3}$$

$$E_2^+ = E_2' + E_2'' = T_{12} \, E_i + R_{21} E_2^- \tag{4}$$

Podemos despejar primero E_2^+ en función de E_i (usando (2) y (4)), y luego es directo obtener el campo reflejado hacia el primer medio y el transmitido hacia el tercero. Reagrupando según pide el enunciado quedan las siguientes amplitudes:

$$R \equiv \frac{E_1^-}{E_1^+} \equiv \frac{E_r}{E_i} = \frac{R_{12} + R_{23} e^{2i\alpha_2}}{1 + R_{12} R_{23} \, e^{2i\alpha_2}}$$

$$T \equiv \frac{E_t}{E_i} = \frac{T_{12} T_{23} e^{i\alpha_2}}{1 + R_{12} R_{23} \, e^{2i\alpha_2}}$$

donde usamos que: $T_{ij} T_{ji} = 1 - R_{ij}^2$ y que $R_{ij} = -R_{ji}$, con R_{ij} y T_{ij} los coeficientes de reflexión y transmisión para una sola interfase como calculamos en el problema 1 (queda como ejercicio mostrarlo).

[*] las ecuaciones son lineales, por lo que superponer puede ser práctico también en la resolución de problemas dinámicos.