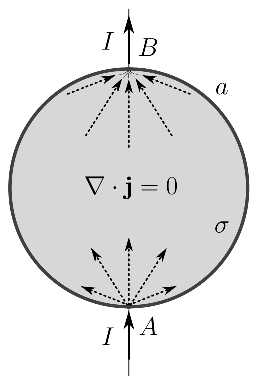
Fenómenos estacionarios, cuasiestacionarios y transitorios.

Ejercicio 1:



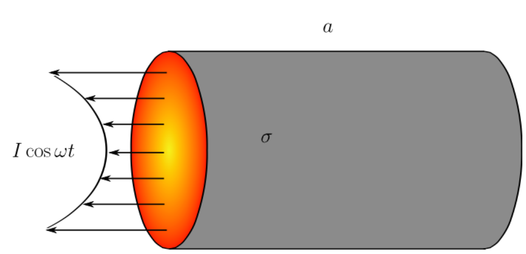
Se considera una esfera de radio a y conductividad σ. Una corriente I ingresa perpendicular a la esfera por un punto A, y egresa por un punto B diametralmente opuesto. El régimen es **estacionario**. Encontrar el potencial dentro de la esfera. Si resuelve el problema usando separación de variables en coordenadas esféricas, obtendrá una suma infinita. Esa suma puede resolverse explícitamente usando que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2 \mp 2xy}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(y)\,(\pm x)^l.$$

Referencias: Una resolución alternativa y no-canónica puede encontrarse en Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, §**21** en la versión en inglés, o §**20** en la versión española; en ambos casos, Problema 2 al final de la sección.

Ejercicio 2: Se tiene un conductor cilíndrico, macizo, de radio a, caracterizado por los parámetros $\mu = \epsilon = 1$ y conductividad σ. Por el mismo circula una corriente alterna del tipo $I = I_0 \cos(\omega t)$. La distribución de la corriente dentro del conductor **no** puede asumirse conocida, sino que debe encontrarse de manera consistente con las ecuaciones de Maxwell. Bajo la **aproximación cuasiestacionaria** (i.e. despreciar el término de corriente de desplazamiento):

a. calcule los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en el interior del conductor.
b. Estudie los casos límites de la distribución de $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ cuando $\delta/a \gg 1$ y $\delta/a \ll 1$, donde δ es el espesor pelicular o "skin depth".
c. encuentre la potencia media disipada y la *resistencia efectiva* en los casos límites estudiados en el ítem anterior. En el caso del espesor pelicular mucho menor que a, encuentre la corriente superficial efectiva.
d.* calcule numéricamente y grafique la resistencia vs la frecuencia en el caso general.



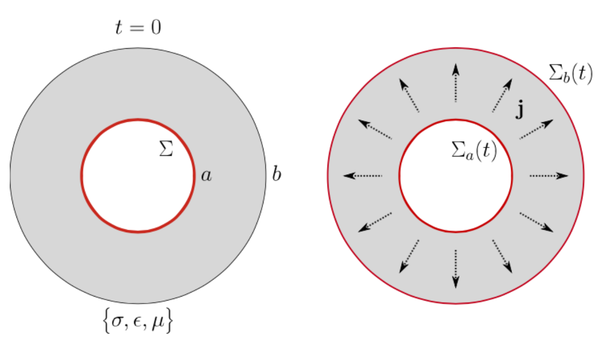
Referencia: Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, §**60** [The skin effect] en la versión en inglés; §**46**, [Efecto pelicular] en la edición española de ed. Reverté.

Ejercicio 3: Una esfera hueca de espesor no–despreciable tiene radio interior a y exterior b, y está caracterizada por una conductividad σ, una constante dieléctrica ϵ y una permeabilidad μ. Sobre la cara interior de la cáscara se ha depositado una densidad superficial de carga uniforme Σ. Si a $t = 0$ se permite que el sistema evolucione:

a. usando argumentos de simetría, esto es, observando frente a qué tipo de transformaciones el sistema descrito permanece *invariante*, ¿cuánto vale $\mathbf{B}$ en todo el espacio y para todo t? ¿Qué simetría tiene el campo eléctrico?
b. Teniendo en cuenta lo anterior, encontrar la forma que adoptan las ecuaciones de Maxwell dentro y fuera del conductor.
c. Encontrar el campo eléctrico, la densidad de corriente y la densidad de carga (superficial y de volumen) en función del tiempo.
d. Mostrar que se cumple el balance de energía según el teorema de Poynting,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V d^3r\, u\right) + \int_V d^3r\, \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = -\oint_S d^2r\, \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,,$$

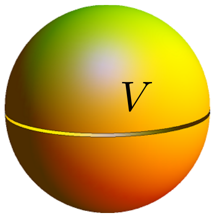
con $u = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})$, $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}$, y donde el volumen V es un volumen de esfera hueca que contiene a la esfera hueca real. En particular, encontrar cómo evoluciona la energía de los campos en función del tiempo y mostrar que la variación de energía entre $t = 0$ y $t = \infty$ es igual a la energía disipada por efecto Joule.



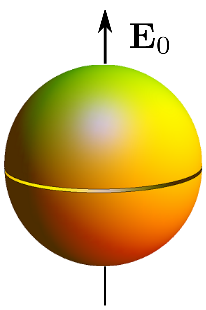
Tensor de Maxwell

Ejercicio 4: Usar el tensor de Maxwell para encontrar:

a. La fuerza entre dos esferas de radios a y b, con cargas q_1 y q_2 y separadas una distancia $d > a + b$.
b. La fuerza por unidad de longitud entre dos cilindros paralelos infinitos de radios a y b, separados una distancia $d > a + b$, y por los que circulan corrientes uniformes I_1 e I_2.



Ejercicio 5: Una esfera conductora de radio a está a potencial V. Usando el tensor de Maxwell, calcular la fuerza que tiende a separar cualquier par de hemisferios. Comparar con el resultado obtenido a partir de la fuerza de Lorentz. Si la esfera está aislada y tiene carga Q: sin hacer ningún otro cálculo, ¿cuál es la fuerza que tiende a separar sus hemisferios?



Ejercicio 6: Una esfera conductora descargada tiene radio a y está en un campo eléctrico externo uniforme $\mathbf{E}_0$.

a. Calcular la fuerza que tiende a separar o a unir los hemisferios según la dirección de $\mathbf{E}_0$.
b. Calcular la fuerza si ahora la esfera tiene carga neta Q ¿Puede obtenerse este resultado sumando a la fuerza obtenida en el ítem anterior la fuerza calculada en la segunda parte del ejercicio anterior?

Ejercicio 7: Calcular la fuerza por unidad de área sobre las paredes de un cilindro infinito de radio a que transporta una corriente superficial uniforme paralela a su eje.