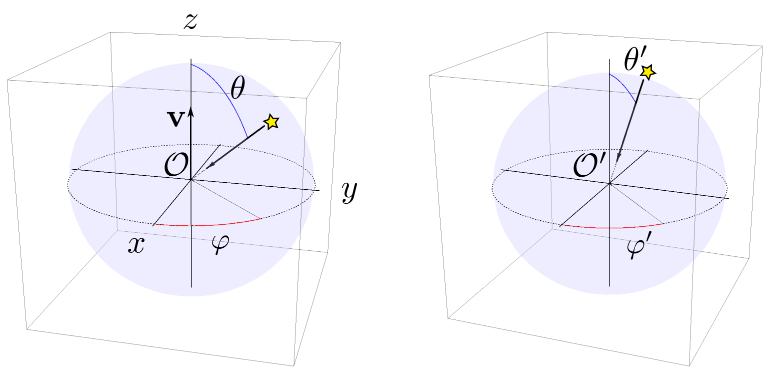
Ejercicio 1: El observador $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad relativa $\mathbf{v}$ respecto de $\mathcal{O}$. En cierto instante, los dos observadores coinciden en el mismo punto del espacio. En ese momento, los dos reciben luz proveniente de una misma estrella muy lejana. Ambos observadores eligen su eje z en la dirección de $\mathbf{v}$, de modo que escribirán el vector de la velocidad de la luz recibida según expresiones análogas; el observador $\mathcal{O}$, por ejemplo, escribirá

$$\mathbf{c}_{\mathcal{O}} = -\big(\cos\varphi\, \sin\theta\, \hat{x} + \sin\varphi\, \sin\theta\, \hat{y} + \cos\theta\, \hat{z}\big)\, c.$$

Obviamente, $|\mathbf{c}_{\mathcal{O}}| = |\mathbf{c}_{\mathcal{O}'}| = c$.



a. Si $\mathcal{O}$ recibe la luz según la dirección definida por los ángulos θ y φ, aplicando las fórmulas de transformación de velocidades, muestre que, según $\mathcal{O}'$, la luz proviene de la dirección definida por los ángulos

$$\varphi' = \varphi, \qquad \cos\theta' = \frac{\cos\theta + \beta}{1 + \beta\cos\theta}. \qquad (\beta = v/c)$$

b. Deduzca estas mismas expresiones a partir de la transformación del cuadrivector número de onda.

c. Una fórmula importante, que puede deducir de lo anterior, relaciona las tangentes de los ángulos θ y θ'. Sabiendo que $\sin^2(x/2) = (1/2)(1 - \cos x)$ y $\cos^2(x/2) = (1/2)(1 + \cos x)$, deduzca la *fórmula de aberración relativista*:

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, \tan\frac{\theta}{2}.$$

d. Aplique la fórmula anterior para valores particulares del ángulo θ. Por ejemplo, $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, \pi$. En especial, muestre que todas las estrellas en el hemisferio $0 \leq \theta \leq \pi/2$ de $\mathcal{O}$ estarán concentradas, según $\mathcal{O}'$, en cierto cono alrededor del eje z. ¿Qué pasa cuando β se acerca a 1?

e. El observador $\mathcal{O}$ ve una pequeña constelación triangular, cuyas 3 estrellas están en las direcciones

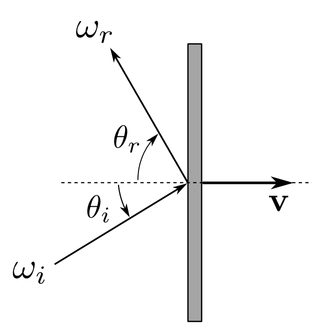
$$\hat{r} \to (\theta, \varphi), \qquad \hat{r}_1 \to (\theta + \delta\theta_1, \varphi + \delta\varphi_1), \qquad \hat{r}_2 \to (\theta + \delta\theta_2, \varphi + \delta\varphi_2).$$

Halle las posiciones de las mismas estrellas según $\mathcal{O}'$ a primer orden en los δ's. ¿Qué relación geométrica guardan entre sí los triángulos que definen la constelación, según sea vista por uno u otro observador? ¿Pasará lo mismo con figuras más complicadas, como las Pléyades, o más extensas, como Orión?

f. A partir de los resultados anteriores, discuta cualitativamente cuál sería el aspecto de la bóveda celeste para un observador que pasara cerca de la Tierra moviéndose a una velocidad relativista.

Ejercicio 2: Sobre un espejo plano que se mueve con velocidad **v** paralela a su normal incide luz de frecuencia ω_i con un ángulo de incidencia θ_i, como muestra la figura.

a. Encuentre la relación entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. Analice el caso $v \ll c$ y compare con el rebote de partículas no relativistas contra una pared en movimiento.
b. Encuentre la frecuencia de la onda reflejada. Para incidencia normal analice qué pasa cuando $v \ll c$ y compare con lo que cabría esperar si, en lugar de luz, hubiera un flujo de partículas o de sonido contra una pared en movimiento.



Ejercicio 3: Un sistema inercial S' se mueve con velocidad **v** respecto de un sistema S. Puede asumirse que los ejes de los dos sistemas coinciden en $t' = t = 0$.

a. Si en S se miden los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, encuentre $\mathbf{E}'(t', \mathbf{r}')$ y $\mathbf{B}'(t', \mathbf{r}')$ en S'.
b. Si en S se propaga una onda plana caracterizada por los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ y $\mathbf{B} = \hat{k} \times \mathbf{E}$, demuestre que en S' también se propaga una onda plana.
c. Si en S se miden los campos estáticos $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, encuentre los campos en S' en los siguientes casos: 1) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{v}$; 2) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{v}$; 3) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \parallel \mathbf{v}$; 4) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$. Proponga ejemplos para cada situación.

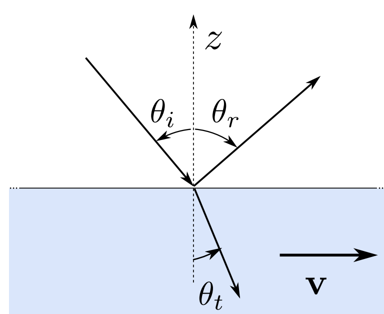
Ejercicio 4: En un sistema S, en cierto instante de tiempo y cierto punto del espacio se miden campos **E** y **B**. Demostrar que:

a. Si **E** y **B** son perpendiculares, lo mismo sucede en cualquier otro sistema inercial.
b. La relación de orden entre $|\mathbf{E}|$ y $|\mathbf{B}|$ es la misma en todos los sistemas.
c. Si **E** es perpendicular a **B** y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces puede encontrarse un sistema en el cual, asociado al mismo evento, o bien sólo hay campo eléctrico o bien solamente campo magnético. ¿Es único?

Ejercicio 5: En un sistema de referencia inercial S, el campo eléctrico forma un ángulo θ con el campo magnético. Ambos campos son uniformes y estáticos.

a. Encontrar un sistema de referencia S' tal que los campos sean paralelos.
b. Si en S los módulos de los campos cumplen $B_0 = 2E_0$, calcular los campos en el sistema de referencia hallado en (a). Tomar el límite para $\theta \ll 1$ y para $\theta \to \pi/2$. Verificar el comportamiento de los invariantes.

Ejercicio 6: Fresnel relativista En el sistema de laboratorio, una onda plana, de frecuencia ω y amplitud **E**, incide desde el vacío sobre la superficie de un líquido de índice de refracción n y $\mu = 1$. El líquido ocupa el semiespacio $z < 0$ y se mueve con velocidad v paralela a su superficie. En el laboratorio, la polarización de la onda puede ser TE o TM. Encuentre la dirección, la amplitud, la polarización y la frecuencia de las ondas transmitidas y reflejadas en el sistema de laboratorio. ¿Es posible definir en el laboratorio un ángulo análogo al ángulo de Brewster?



Ejercicio 7: Encontrar la amplitud y la intensidad de la onda reflejada en el problema 2.

Ejercicio 8: Un cilindro circular macizo y de longitud infinita tiene densidad de carga y de corriente uniformes. La corriente es paralela al eje del cilindro. Encontrar un sistema de referencia en el cual sólo hay campo magnético o eléctrico. ¿Es único?

Ejercicio 9: Un cilindro circular infinito está cargado uniformemente en volumen. Calcular los campos en un sistema de referencia que se mueve paralelo al cilindro. Primero, a partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema, y luego por transformación de los campos.

Ejercicio 10: Ahora hay dos barras como la anterior, dispuestas una paralela a la otra. Demostrar que la fuerza por unidad de longitud sobre cualquiera de las barras, medida en un sistema de referencia S' que se mueve paralelo a ellas, es la misma que en el sistema S en el que las barras están en reposo. Demostrarlo primero a partir de la fuerza de Lorentz y de los campos en S', y luego demostrando que el objeto $f^\mu \equiv {}^1\!/_c\, F^\mu_{\ \nu} j^\nu$ es el cuadrivector que es la generalización covariante de la densidad de fuerza. Como "yapa" del segundo método, obtener la ley de transformación relativista para la potencia disipada por efecto Joule.

Ejercicio 11: Un dipolo magnético puntual $\mathbf{m}$ se encuentra en reposo en el origen de un sistema S', por lo tanto los potenciales en este sistema están dados por $\Phi' = 0$ y $\mathbf{A}' = \mathbf{m}\times\mathbf{r}'/r'^3$. El sistema S' se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto al sistema de laboratorio S.

a. Demostrar que en S los potenciales a primer orden en β son

$$\Phi = \frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{m})\cdot\mathbf{R}}{c\,R^3}, \qquad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m}\times\mathbf{R}}{R^3},$$

con $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, donde $\mathbf{r}_0(t)$ es la posición del origen de S' medida en S.

b. A partir de estos potenciales, calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en S y mostrar que el campo eléctrico se puede escribir de las siguientes maneras alternativas

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v}\times\mathbf{m}/c) - \mathbf{m}\times\frac{[3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v}]}{cR^3}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v}\times\mathbf{m}/2c) + \frac{3}{2}\mathbf{n}\times\frac{[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{m} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})\mathbf{v}]}{cR^3}$$

donde $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ y $\mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{p})$ es el campo eléctrico de un dipolo efectivo de valor $\mathbf{p}$.

c. Encontrar los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en S, a primer orden en β, transformando directamente los campos $\mathbf{E}' = 0$ y $\mathbf{B}'$ del sistema S'. Comparar con las expresiones anteriores.