# Física Teórica 1 - Práctica

Radiación Multipolar.

# Radiación Multipolar

A partir del potencial vector

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r'\mathbf{j}(\mathbf{r}')\frac{e^{-i\omega(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1}$$

# Radiación Multipolar

A partir del potencial vector

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r'\mathbf{j}(\mathbf{r}')\frac{e^{-i\omega(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1}$$

se pueden calcular los campos de radiación usando la aproximación $d \ll \lambda \ll r$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^{(M)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^{(E)}(\mathbf{r},t) + \mathcal{O}\left[(1/\lambda)^4\right] \\ \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}^{(M)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}^{(E)}(\mathbf{r},t) + \mathcal{O}\left[(1/\lambda)^4\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

# Radiación Multipolar

A partir del potencial vector

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r'\mathbf{j}(\mathbf{r}')\frac{e^{-i\omega(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1}$$

se pueden calcular los campos de radiación usando la aproximación $d \ll \lambda \ll r$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^{(M)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^{(E)}(\mathbf{r},t) + \mathcal{O}\left[(1/\lambda)^4\right] \\ \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}^{(M)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}^{(E)}(\mathbf{r},t) + \mathcal{O}\left[(1/\lambda)^4\right].\end{aligned} \tag{2}$$

Estos son la contribución de los campos que decaen como $1/r$ y que transportan energía en infinito.

# Radiación Multipolar

A partir del potencial vector

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r'\mathbf{j}(\mathbf{r}')\frac{e^{-i\omega(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1}$$

se pueden calcular los campos de radiación usando la aproximación $d \ll \lambda \ll r$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^{(M)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^{(E)}(\mathbf{r},t) + \mathcal{O}\left[(1/\lambda)^4\right]\\ \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}^{(M)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}^{(E)}(\mathbf{r},t) + \mathcal{O}\left[(1/\lambda)^4\right].\end{aligned} \tag{2}$$

Estos son la contribución de los campos que decaen como $1/r$ y que transportan energía en infinito.Para fuentes armónicas con frecuencia $\omega$ vienen dados por:

- Campo magnético a orden dipolar eléctrico

$$\mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r},t) = k^2\left(\hat{n}\times\mathbf{p}\right)\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{3}$$

# Radiación Multipolar

A partir del potencial vector

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r'\mathbf{j}(\mathbf{r}')\frac{e^{-i\omega(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1}$$

se pueden calcular los campos de radiación usando la aproximación $d \ll \lambda \ll r$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^{(M)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^{(E)}(\mathbf{r},t) + \mathcal{O}\left[(1/\lambda)^4\right] \\ \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}^{(M)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}^{(E)}(\mathbf{r},t) + \mathcal{O}\left[(1/\lambda)^4\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Estos son la contribución de los campos que decaen como $1/r$ y que transportan energía en infinito.Para fuentes armónicas con frecuencia $\omega$ vienen dados por:

- Campo magnético a orden dipolar eléctrico

$$\mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r},t) = k^2\left(\hat{n}\times\mathbf{p}\right)\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{3}$$

- Campo eléctrico a orden dipolar eléctrico

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r},t) = k^2\left(\hat{n}\times\mathbf{p}\right)\times\hat{n}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{4}$$

# Radiación Multipolar

- Campo magnético a orden dipolar magnético

$$\mathbf{B}^{(M)}(\mathbf{r},t) = k^2 \hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{5}$$

# Radiación Multipolar

- Campo magnético a orden dipolar magnético

$$\mathbf{B}^{(M)}(\mathbf{r},t) = k^2\hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{5}$$

- Campo eléctrico a orden dipolar magnético

$$\mathbf{E}^{(M)}(\mathbf{r},t) = -k^2 (\hat{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{6}$$

## Radiación Multipolar

- Campo magnético a orden dipolar magnético

$$\mathbf{B}^{(M)}(\mathbf{r},t) = k^2 \hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{5}$$

- Campo eléctrico a orden dipolar magnético

$$\mathbf{E}^{(M)}(\mathbf{r},t) = -k^2 (\hat{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{6}$$

- Campo magnético a orden cuadrupolar eléctrico

$$\mathbf{B}^{(E)}(\mathbf{r},t) = -i\frac{k^3}{6} \hat{n} \times \left(\overline{\overline{Q}} \cdot \hat{n}\right) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{7}$$

# Radiación Multipolar

- Campo magnético a orden dipolar magnético

$$\mathbf{B}^{(M)}(\mathbf{r},t) = k^2 \hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{5}$$

- Campo eléctrico a orden dipolar magnético

$$\mathbf{E}^{(M)}(\mathbf{r},t) = -k^2 (\hat{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{6}$$

- Campo magnético a orden cuadrupolar eléctrico

$$\mathbf{B}^{(E)}(\mathbf{r},t) = -i\frac{k^3}{6} \hat{n} \times \left(\overline{\overline{Q}} \cdot \hat{n}\right) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{7}$$

- Campo eléctrico a orden cuadrupolar eléctrico

$$\mathbf{E}^{(M)}(\mathbf{r},t) = -i\frac{k^3}{6} \left[\hat{n} \times \left(\overline{\overline{Q}} \cdot \hat{n}\right)\right] \times \hat{n} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{8}$$

- Campo magnético a orden dipolar magnético

$$\mathbf{B}^{(M)}(\mathbf{r},t) = k^2\hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{m})\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{5}$$

- Campo eléctrico a orden dipolar magnético

$$\mathbf{E}^{(M)}(\mathbf{r},t) = -k^2\,(\hat{n} \times \mathbf{m})\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{6}$$

- Campo magnético a orden cuadrupolar eléctrico

$$\mathbf{B}^{(E)}(\mathbf{r},t) = -i\frac{k^3}{6}\hat{n} \times \left(\overline{\overline{Q}} \cdot \hat{n}\right)\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{7}$$

- Campo eléctrico a orden cuadrupolar eléctrico

$$\mathbf{E}^{(M)}(\mathbf{r},t) = -i\frac{k^3}{6}\left[\hat{n} \times \left(\overline{\overline{Q}} \cdot \hat{n}\right)\right] \times \hat{n}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{8}$$

En general los campos eléctrico y magnético se relacionan por

$$\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}, t) = -\hat{n} \times \mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r}, t) \times \hat{n}. \tag{9}$$

# Radiación Multipolar

En general los campos eléctrico y magnético se relacionan por

$$\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r},t) = -\hat{n}\times\mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r},t)\times\hat{n}. \tag{9}$$

Usando la aproximación de campo lejano podemos tomar

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \simeq \hat{r}, \quad \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \simeq \frac{1}{r} \tag{10}$$

En general los campos eléctrico y magnético se relacionan por

$$\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r},t) = -\hat{n} \times \mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r},t) \times \hat{n}. \tag{9}$$

Usando la aproximación de campo lejano podemos tomar

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \simeq \hat{r}, \quad \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \simeq \frac{1}{r} \tag{10}$$

y como las fuentes son armónicas definiendo $f(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ podemos expresar a los campos de radiación a partir de magnitudes reales

En general los campos eléctrico y magnético se relacionan por

$$\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r},t) = -\hat{n} \times \mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r},t) \times \hat{n}. \tag{9}$$

Usando la aproximación de campo lejano podemos tomar

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \simeq \hat{r}, \quad \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \simeq \frac{1}{r} \tag{10}$$

y como las fuentes son armónicas definiendo $f(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ podemos expresar a los campos de radiación a partir de magnitudes reales

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{rad} &= -\frac{1}{c^2 r}\left[\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}} + (\hat{r} \times \ddot{\mathbf{m}}) \times \hat{r} + \frac{1}{6c}\hat{r} \times \dddot{\mathbf{Q}}\right]|_{t_{ret}} + \mathcal{O}\left[(1/\lambda)^4\right] \\ \mathbf{E}_{rad} &= \frac{\hat{r}}{c^2 r} \times \left[\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}} + \ddot{\mathbf{m}} + \frac{1}{6c}\hat{r} \times \dddot{\mathbf{Q}}\right]|_{t_{ret}} + \mathcal{O}\left[(1/\lambda)^4\right], \end{aligned} \tag{11}$$

donde se definió $\mathbf{Q} = \overline{\overline{Q}} \cdot \hat{r}$.

Los momentos dipolares y cuadrupolares son

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(\mathbf{r},t) &= \int d^3r' \rho(\mathbf{r}',t)\mathbf{r}'(t) \rightarrow \mathbf{p}(\mathbf{r},t) = \sum_\alpha q_\alpha \mathbf{r}_\alpha(t) \\
\mathbf{m}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{2c}\int d^3r' \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}',t) \rightarrow \mathbf{m}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2c}\sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha(t) \times q_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha(t) \\
Q_{ij}(\mathbf{r},t) &= \int d^3r' \left[3r'_i(t)r'_j(t) - \delta_{ij}|r'|^2\right] \rho(\mathbf{r}',t) \rightarrow Q_{ij}(\mathbf{r},t) = \sum_\alpha q_\alpha \left[3r_{\alpha i}(t)r_{\alpha j}(t) - \delta_{ij}|r_\alpha|^2\right].
\end{aligned} \tag{12}$$

La potencia por unidad de ángulo sólido viene dada por el vector de Poynting

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \mathbf{S} \cdot \hat{n} r^2 \tag{13}$$

# Radiación Multipolar

La potencia por unidad de ángulo sólido viene dada por el vector de Poynting

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \mathbf{S} \cdot \hat{n} r^2 \tag{13}$$

el cual a su vez, para una onda, viene dado por

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad}\right) = \frac{c}{4\pi}\left(\mathbf{E}_{rad} \times (\hat{n} \times \mathbf{E}_{rad})\right) = \frac{c}{4\pi}\hat{n}|\mathbf{E}_{rad}|^2. \tag{14}$$

La potencia por unidad de ángulo sólido viene dada por el vector de Poynting

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \mathbf{S} \cdot \hat{n} r^2 \tag{13}$$

el cual a su vez, para una onda, viene dado por

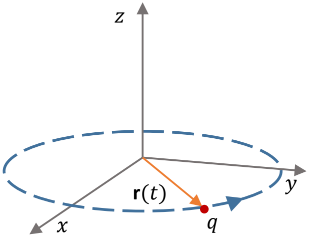
$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad}\right) = \frac{c}{4\pi}\left(\mathbf{E}_{rad} \times \left(\hat{n} \times \mathbf{E}_{rad}\right)\right) = \frac{c}{4\pi}\hat{n}|\mathbf{E}_{rad}|^2. \tag{14}$$

La potencia media por unidad de ángulo sólido es

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \frac{dP}{d\Omega}(t). \tag{15}$$

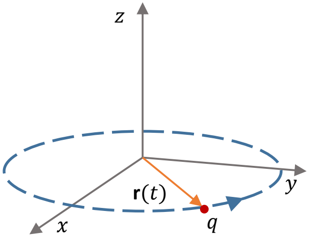
# Problema 5 a

**Carga en movimiento circular**



# Problema 5 a

**Carga en movimiento circular**

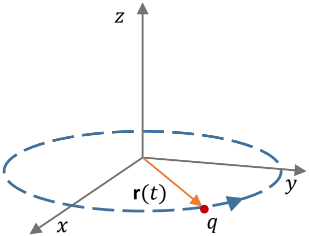



La trayectoria viene dada por

$$\mathbf{r}(t) = a(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t), \qquad (16)$$

# Problema 5 a

## Carga en movimiento circular




La trayectoria viene dada por

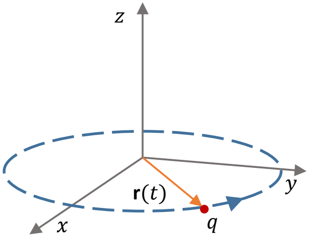
$$\mathbf{r}(t) = a(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t), \qquad (16)$$

y su momento dipolar viene dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(\mathbf{r},t) &= \sum_{\alpha} q_\alpha \mathbf{r}_\alpha(t) \rightarrow \mathbf{p}(\mathbf{r},t) \\ &= q\mathbf{r}(t) = qa(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t) \qquad (17)\end{aligned}$$

# Problema 5 a

## Carga en movimiento circular




La trayectoria viene dada por

$$\mathbf{r}(t) = a(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t), \qquad (16)$$

y su momento dipolar viene dado por

$$\mathbf{p}(\mathbf{r},t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha}\mathbf{r}_{\alpha}(t) \to \mathbf{p}(\mathbf{r},t)$$
$$= q\mathbf{r}(t) = qa(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t) \qquad (17)$$

$$\implies \ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) = -\omega^2 qa(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t) \qquad (18)$$

# Problema 5 a

Usando la relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \sin\theta\cos\varphi\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\hat{\theta} - \sin\varphi\hat{\varphi} \\
\hat{y} &= \sin\theta\sin\varphi\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\hat{\theta} + \cos\varphi\hat{\varphi} \\
\hat{z} &= \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}
\end{aligned} \tag{19}$$

# Problema 5 a

Usando la relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= \sin\theta\cos\varphi\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\hat{\theta} - \sin\varphi\hat{\varphi} \\
\hat{y} &= \sin\theta\sin\varphi\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\hat{\theta} + \cos\varphi\hat{\varphi} \\
\hat{z} &= \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}
\end{aligned} \tag{19}
$$

podemos calcular

$$
\begin{aligned}
\hat{r}\times\ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) = -\omega^2 qa\hat{r}\times\Big[ &\left(\sin\theta\cos\varphi\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\hat{\theta} - \sin\varphi\hat{\varphi}\right)\cos\omega t \\
&+ \left(\sin\theta\sin\varphi\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\hat{\theta} + \cos\varphi\hat{\varphi}\right)\sin\omega t\Big]
\end{aligned} \tag{20}
$$

# Problema 5 a

Usando la relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \sin\theta\cos\varphi\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\hat{\theta} - \sin\varphi\hat{\varphi}\\ \hat{y} &= \sin\theta\sin\varphi\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\hat{\theta} + \cos\varphi\hat{\varphi}\\ \hat{z} &= \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}\end{aligned} \tag{19}$$

podemos calcular

$$\begin{aligned}\hat{r}\times\ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) = -\omega^2 qa\hat{r}\times\Big[&\left(\sin\theta\cos\varphi\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\hat{\theta} - \sin\varphi\hat{\varphi}\right)\cos\omega t\\ &+ \left(\sin\theta\sin\varphi\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\hat{\theta} + \cos\varphi\hat{\varphi}\right)\sin\omega t\Big]\end{aligned} \tag{20}$$

$$= -\omega^2 qa\left[\left(\cos\theta\cos\varphi\hat{\varphi} + \sin\varphi\hat{\theta}\right)\cos\omega t + \left(\cos\theta\sin\varphi\hat{\varphi} - \cos\varphi\hat{\theta}\right)\sin\omega t\right]$$

# Problema 5 a

Usando la relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \sin\theta\cos\varphi\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\hat{\theta} - \sin\varphi\hat{\varphi} \\
\hat{y} &= \sin\theta\sin\varphi\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\hat{\theta} + \cos\varphi\hat{\varphi} \\
\hat{z} &= \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}
\end{aligned} \tag{19}$$

podemos calcular

$$\begin{aligned}
\hat{r}\times\ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) = -\omega^2 qa\hat{r}\times\big[ &\left(\sin\theta\cos\varphi\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\hat{\theta} - \sin\varphi\hat{\varphi}\right)\cos\omega t \\
&+ \left(\sin\theta\sin\varphi\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\hat{\theta} + \cos\varphi\hat{\varphi}\right)\sin\omega t\big]
\end{aligned} \tag{20}$$

$$= -\omega^2 qa\left[\left(\cos\theta\cos\varphi\hat{\varphi} + \sin\varphi\hat{\theta}\right)\cos\omega t + \left(\cos\theta\sin\varphi\hat{\varphi} - \cos\varphi\hat{\theta}\right)\sin\omega t\right]$$

$$= -\omega^2 qa\left[\left(\cos\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi\right)\cos\theta\hat{\varphi} + \left(\cos\omega t\sin\varphi - \sin\omega t\cos\varphi\right)\hat{\theta}\right]$$

# Problema 5 a

Usando la relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \sin\theta\cos\varphi\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\hat{\theta} - \sin\varphi\hat{\varphi} \\
\hat{y} &= \sin\theta\sin\varphi\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\hat{\theta} + \cos\varphi\hat{\varphi} \\
\hat{z} &= \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}
\end{aligned} \tag{19}$$

podemos calcular

$$\begin{aligned}
\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = -\omega^2 q a \hat{r} \times \Big[ &\left(\sin\theta\cos\varphi\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\hat{\theta} - \sin\varphi\hat{\varphi}\right)\cos\omega t \\
&+ \left(\sin\theta\sin\varphi\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\hat{\theta} + \cos\varphi\hat{\varphi}\right)\sin\omega t\Big]
\end{aligned} \tag{20}$$

$$= -\omega^2 q a \left[\left(\cos\theta\cos\varphi\hat{\varphi} + \sin\varphi\hat{\theta}\right)\cos\omega t + \left(\cos\theta\sin\varphi\hat{\varphi} - \cos\varphi\hat{\theta}\right)\sin\omega t\right]$$

$$= -\omega^2 q a \left[(\cos\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi)\cos\theta\hat{\varphi} + (\cos\omega t\sin\varphi - \sin\omega t\cos\varphi)\,\hat{\theta}\right]$$

$$= -\omega^2 q a \left[\cos(\omega t - \varphi)\cos\theta\hat{\varphi} - \sin(\omega t - \varphi)\,\hat{\theta}\right] \tag{21}$$

# Problema 5 a

$$\hat{r} \times [\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)] = \hat{r} \times \left\{ -\omega^2 qa \left[ \cos(\omega t - \varphi) \cos\theta \hat{\varphi} - \sin(\omega t - \varphi) \hat{\theta} \right] \right\} \tag{22}$$

# Problema 5 a

$$\hat{r} \times [\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)] = \hat{r} \times \left\{ -\omega^2 qa \left[ \cos(\omega t - \varphi) \cos\theta \hat{\varphi} - \sin(\omega t - \varphi) \hat{\theta} \right] \right\} \tag{22}$$

$$= \omega^2 qa \left[ \cos(\omega t - \varphi) \cos\theta \hat{\theta} + \sin(\omega t - \varphi) \hat{\varphi} \right] \tag{23}$$

Reemplazando lo calculado obtenemos el campo de radiación dipolar eléctrico

$$\mathbf{E}_{rad}^{(0)} = \frac{\hat{r}}{c^2 r} \times [\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}}] \,|_{t_{ret}} \tag{24}$$

$$= \frac{\omega^2 qa}{c^2 r} \left[ \cos(\omega t - \varphi) \cos\theta \hat{\theta} + \sin(\omega t - \varphi) \hat{\varphi} \right] \tag{25}$$

# Problema 5 a

$$\hat{r} \times [\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)] = \hat{r} \times \left\{ -\omega^2 qa \left[ \cos\left(\omega t - \varphi\right) \cos\theta \hat{\varphi} - \sin\left(\omega t - \varphi\right) \hat{\theta} \right] \right\} \tag{22}$$

$$= \omega^2 qa \left[ \cos\left(\omega t - \varphi\right) \cos\theta \hat{\theta} + \sin\left(\omega t - \varphi\right) \hat{\varphi} \right] \tag{23}$$

Reemplazando lo calculado obtenemos el campo de radiación dipolar eléctrico

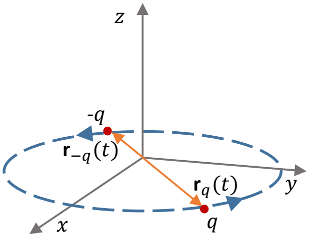
$$\mathbf{E}^{(0)}_{rad} = \frac{\hat{r}}{c^2 r} \times [\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}}] \,|_{t_{ret}} \tag{24}$$

$$= \frac{\omega^2 qa}{c^2 r} \left[ \cos\left(\omega t - \varphi\right) \cos\theta \hat{\theta} + \sin\left(\omega t - \varphi\right) \hat{\varphi} \right] \tag{25}$$

$$\mathbf{B}^{(0)}_{rad} = \hat{r} \times \mathbf{E}^{(0)}_{rad} \tag{26}$$

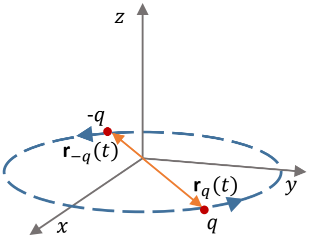
# Problema 5 b

**Dos cargas opuestas en movimiento circular**



# Problema 5 b

## Dos cargas opuestas en movimiento circular

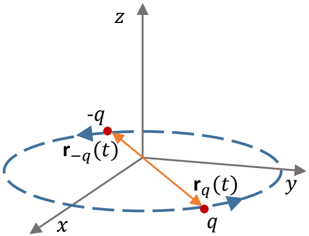



$$\mathbf{r}_q(t) = a(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)$$

$$\mathbf{r}_{-q}(t) = -\mathbf{r}_q(t)$$

# Problema 5 b

## Dos cargas opuestas en movimiento circular




$$\mathbf{r}_q(t) = a(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)$$

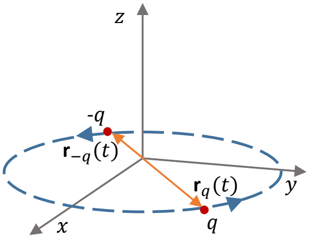
$$\mathbf{r}_{-q}(t) = -\mathbf{r}_q(t)$$

Los momentos de la distribución son

$$\mathbf{p}(\mathbf{r},t) = \sum_\alpha q_\alpha \mathbf{r}_\alpha(t) \rightarrow \mathbf{p}(\mathbf{r},t) = q\mathbf{r}_q(t) - q\mathbf{r}_{-q}(t)$$

# Problema 5 b

## Dos cargas opuestas en movimiento circular




$$\mathbf{r}_q(t) = a(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)$$

$$\mathbf{r}_{-q}(t) = -\mathbf{r}_q(t)$$

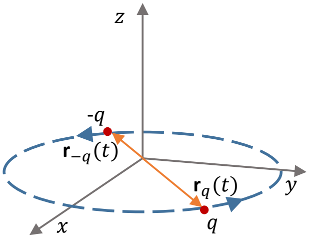
Los momentos de la distribución son

$$\mathbf{p}(\mathbf{r},t) = \sum_\alpha q_\alpha \mathbf{r}_\alpha(t) \to \mathbf{p}(\mathbf{r},t) = q\mathbf{r}_q(t) - q\mathbf{r}_{-q}(t)$$

$$= qd(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t), \quad d = 2a$$

# Problema 5 b

## Dos cargas opuestas en movimiento circular




$$\mathbf{r}_q(t) = a(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)$$

$$\mathbf{r}_{-q}(t) = -\mathbf{r}_q(t)$$

Los momentos de la distribución son

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \mathbf{r}_\alpha(t) \rightarrow \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{r}_q(t) - q\mathbf{r}_{-q}(t)$$

$$= qd(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t), \quad d = 2a$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2c}\left[\mathbf{r}_q(t) \times q\dot{\mathbf{r}}_q(t) - \mathbf{r}_{-q}(t) \times q\dot{\mathbf{r}}_{-q}(t)\right] = 0$$

# Problema 5 b

$$Q_{ij}(\mathbf{r},t) = q\left[3r_{qi}(t)r_{qj}(t) - \delta_{ij}|r_q|^2\right] - q\left[3r_{-qi}(t)r_{-qj}(t) - \delta_{ij}|r_{-q}|^2\right] = 0$$

# Problema 5 b

$$Q_{ij}(\mathbf{r},t) = q\left[3r_{qi}(t)r_{qj}(t) - \delta_{ij}|r_q|^2\right] - q\left[3r_{-qi}(t)r_{-qj}(t) - \delta_{ij}|r_{-q}|^2\right] = 0$$

El campo de radiación es igual al dipolar eléctrico de una carga puntual con $a = d$

$$\mathbf{E}_{rad} = \frac{\omega^2 qd}{c^2 r}\left[\cos(\omega t - \varphi)\cos\theta\hat{\theta} + \sin(\omega t - \varphi)\,\hat{\varphi}\right]|_{t=t_{ret}} \tag{27}$$

# Problema 5 b

$$Q_{ij}(\mathbf{r},t) = q\left[3r_{qi}(t)r_{qj}(t) - \delta_{ij}|r_q|^2\right] - q\left[3r_{-qi}(t)r_{-qj}(t) - \delta_{ij}|r_{-q}|^2\right] = 0$$

El campo de radiación es igual al dipolar eléctrico de una carga puntual con $a = d$

$$\mathbf{E}_{rad} = \frac{\omega^2 qd}{c^2 r}\left[\cos(\omega t - \varphi)\cos\theta\hat{\theta} + \sin(\omega t - \varphi)\hat{\varphi}\right]|_{t=t_{ret}} \tag{27}$$

$$\mathbf{B}_{rad} = \frac{\omega^2 qd}{c^2 r}\left[\cos(\omega t - \varphi)\cos\theta\hat{\varphi} - \sin(\omega t - \varphi)\hat{\theta}\right]|_{t=t_{ret}} \tag{28}$$

# Problema 5 b

La potencia por unidad de ángulo sólido viene dada por

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \mathbf{S} \cdot \hat{n} r^2 \tag{29}$$

# Problema 5 b

La potencia por unidad de ángulo sólido viene dada por

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \mathbf{S} \cdot \hat{n} r^2 \tag{29}$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \left( \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} \right) = \frac{c}{4\pi} \left( \mathbf{E}_{rad} \times (\hat{n} \times \mathbf{B}_{rad}) \right) = \frac{c}{4\pi} \hat{n} |\mathbf{E}_{rad}|^2 \tag{30}$$

# Problema 5 b

La potencia por unidad de ángulo sólido viene dada por

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \mathbf{S} \cdot \hat{n} r^2 \tag{29}$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \left( \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} \right) = \frac{c}{4\pi} \left( \mathbf{E}_{rad} \times \left( \hat{n} \times \mathbf{B}_{rad} \right) \right) = \frac{c}{4\pi} \hat{n} |\mathbf{E}_{rad}|^2 \tag{30}$$

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \mathbf{S} \cdot \hat{n} r^2 = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_{rad}|^2 r^2 = \frac{c r^2}{4\pi} \frac{\omega^4 q^2 d^2}{c^4 r^2} \left[ \cos^2 \left( \omega t - \varphi \right) \cos^2 \theta + \sin^2 \left( \omega t - \varphi \right) \right] |_{t=t_{ret}} \tag{31}$$

# Problema 5 b

La potencia por unidad de ángulo sólido viene dada por

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \mathbf{S} \cdot \hat{n} r^2 \tag{29}$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \left( \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} \right) = \frac{c}{4\pi} \left( \mathbf{E}_{rad} \times \left( \hat{n} \times \mathbf{B}_{rad} \right) \right) = \frac{c}{4\pi} \hat{n} |\mathbf{E}_{rad}|^2 \tag{30}$$

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \mathbf{S} \cdot \hat{n} r^2 = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_{rad}|^2 r^2 = \frac{cr^2}{4\pi} \frac{\omega^4 q^2 d^2}{c^4 r^2} \left[ \cos^2 \left( \omega t - \varphi \right) \cos^2 \theta + \sin^2 \left( \omega t - \varphi \right) \right] |_{t=t_{ret}} \tag{31}$$

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{\omega^4 q^2 d^2}{4\pi c^3} \left[ \cos^2 \left( \omega t - \varphi \right) \cos^2 \theta + \sin^2 \left( \omega t - \varphi \right) \right] |_{t=t_{ret}} \tag{32}$$

# Problema 5 b

La potencia media es

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega}(t) \right\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \frac{dP}{d\Omega}(t), \qquad \tau = \frac{2\pi}{\omega} \tag{33}$$

# Problema 5 b

La potencia media es

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega}(t) \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \frac{dP}{d\Omega}(t), \qquad \tau = \frac{2\pi}{\omega} \tag{33}$$

$$= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \frac{\omega^4 q^2 d^2}{4\pi c^3} \left[ \cos^2 (\omega t - \varphi) \cos^2 \theta + \sin^2 (\omega t - \varphi) \right] |_{t=t_{ret}} \tag{34}$$

# Problema 5 b

La potencia media es

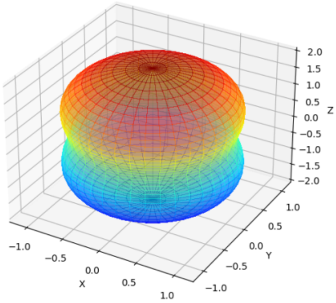
$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega}(t) \right\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \frac{dP}{d\Omega}(t), \qquad \tau = \frac{2\pi}{\omega} \tag{33}$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \frac{\omega^4 q^2 d^2}{4\pi c^3}\left[\cos^2\left(\omega t - \varphi\right)\cos^2\theta + \sin^2\left(\omega t - \varphi\right)\right]|_{t=t_{ret}} \tag{34}$$

$$= \frac{\omega^4 q^2 d^2}{4\pi c^3}\left[\frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\right] = \frac{\omega^4 q^2 d^2}{8\pi c^3}\left[\cos^2\theta + 1\right] \tag{35}$$

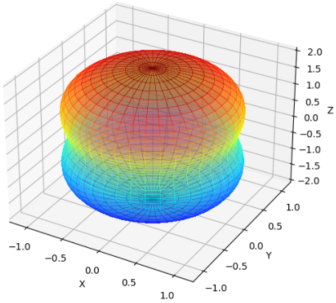
# Problema 5 b

La potencia es



# Problema 5 b

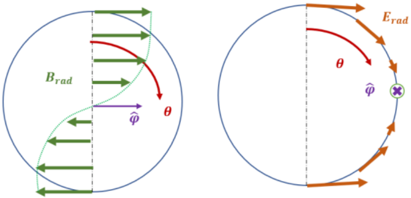
La potencia es




Tomando $t = 0$ y $\varphi = 0$ podemos graficar los campos

$$\mathbf{E}_{rad} = \frac{\omega^2 qd}{c^2 r} \cos\theta \hat{\theta}$$

$$\mathbf{B}_{rad} = \frac{\omega^2 qd}{c^2 r} \cos\theta \hat{\varphi}$$



# Problema 5 b

La potencia total es

$$P(t) = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{\omega^4 q^2 d^2}{4\pi c^3} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\cos^2(\omega t - \varphi)\cos^2\theta + \sin^2(\omega t - \varphi)\right] |_{t=t_{ret}} \tag{36}$$

## Problema 5 b

La potencia total es

$$P(t) = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{\omega^4 q^2 d^2}{4\pi c^3} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\cos^2\left(\omega t - \varphi\right)\cos^2\theta + \sin^2\left(\omega t - \varphi\right)\right] |_{t=t_{ret}} \tag{36}$$

$$= \frac{\omega^4 q^2 d^2}{4\pi c^3} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \pi \left[\cos^2\theta + 1\right] = \frac{\omega^4 q^2 d^2}{4\pi c^3} \pi \left[\frac{2}{3} + 2\right] \tag{37}$$

# Problema 5 b

La potencia total es

$$P(t) = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{\omega^4 q^2 d^2}{4\pi c^3} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\cos^2(\omega t - \varphi)\cos^2\theta + \sin^2(\omega t - \varphi)\right] |_{t=t_{ret}} \tag{36}$$

$$= \frac{\omega^4 q^2 d^2}{4\pi c^3} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \pi \left[\cos^2\theta + 1\right] = \frac{\omega^4 q^2 d^2}{4\pi c^3} \pi \left[\frac{2}{3} + 2\right] \tag{37}$$

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{\omega^4 q^2 d^2}{c^3} = \langle P(t) \rangle \tag{38}$$