Física Teórica 1 - Práctica

Relatividad.

Recordemos

Los cuadrivectores (v^μ), como por ejemplo,

$$(x^\mu) = (ct, \vec{x})$$
$$(u^\mu) = \gamma(c, \vec{u})$$
$$(p^\mu) = m(u^\mu) = (E/c, \vec{p})$$
$$(k^\mu) = (\omega/c, \vec{k})$$
$$(j^\mu) = (c\rho, \vec{j})$$
$$(A^\mu) = (\phi, \vec{A})$$
$$(\partial_\mu) = (1/c\partial_t, \nabla)$$

Recordemos

Los cuadrivectores (v^μ), como por ejemplo,

$$(x^\mu) = (ct, \vec{x})$$
$$(u^\mu) = \gamma(c, \vec{u})$$
$$(p^\mu) = m(u^\mu) = (E/c, \vec{p})$$
$$(k^\mu) = (\omega/c, \vec{k})$$
$$(j^\mu) = (c\rho, \vec{j})$$
$$(A^\mu) = (\phi, \vec{A})$$
$$(\partial_\mu) = (1/c\partial_t, \nabla)$$

transforman ante un elemento del grupo de Lorentz (rotaciones, boosts, inversiones temporales y espaciales) $(L^\mu{}_\nu)$ como

$$v'^\mu = L^\mu{}_\nu v^\nu.$$

Recordemos

Los cuadrivectores (v^μ), como por ejemplo,

$$(x^\mu) = (ct, \vec{x})$$
$$(u^\mu) = \gamma(c, \vec{u})$$
$$(p^\mu) = m(u^\mu) = (E/c, \vec{p})$$
$$(k^\mu) = (\omega/c, \vec{k})$$
$$(j^\mu) = (c\rho, \vec{j})$$
$$(A^\mu) = (\phi, \vec{A})$$
$$(\partial_\mu) = (1/c\partial_t, \nabla)$$

transforman ante un elemento del grupo de Lorentz (rotaciones, boosts, inversiones temporales y espaciales) $(L^\mu{}_\nu)$ como

$$v'^\mu = L^\mu{}_\nu v^\nu.$$

En particular para un boost $(L^\mu{}_\nu) = (\Lambda^\mu{}_\nu)$ de velocidad $\vec{u}$ tenemos

$$v^{0\prime} = \gamma(v^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{v}_\parallel)$$
$$\vec{v}'_\parallel = \gamma(\vec{v}_\parallel - \vec{\beta} v^0)$$
$$\vec{v}'_\perp = \vec{v}_\perp$$

siendo $\vec{\beta} = \vec{u}/c$ y $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

La métrica

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nos permite subir y bajar los índices

$$v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu$$

pasando de un vector contravariante a uno covariante.

La métrica

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nos permite subir y bajar los índices

$$v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu$$

pasando de un vector contravariante a uno covariante.

Podemos definir el tensor electromagnético como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F^{\mu\nu}) = \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} \eta^{\beta\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

También se puede definir el tensor dual

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & E_y \\ B_y & -E_z & 0 & -E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedades del tensor electromagnético

- Antisimétrico

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

- Seis componentes independientes (E_x, E_y, E_z) y (B_x, B_y, B_z)
- Invariantes:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(E^2 - B^2)$$
$$\mathcal{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -4\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$$
$$\det F = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2$$
$$\mathrm{Tr}F = F^{\mu}_{\mu} = 0$$

Usando que los campos eléctricos y magnéticos son componentes del tensor $F_{\mu\nu}$ y sabiendo que este transforma como $(F^{\mu\nu})' = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} F^{\alpha\beta} \Lambda^{\nu}{}_{\beta}$, se obtiene que los campos transforman como

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} \\
\mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} \\
\mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma \left(\mathbf{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \mathbf{B} \right) \\
\mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \mathbf{E} \right)
\end{aligned}
$$

Usando que los campos eléctricos y magnéticos son componentes del tensor $F_{\mu\nu}$ y sabiendo que este transforma como $(F^{\mu\nu})' = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} F^{\alpha\beta} \Lambda^{\nu}{}_{\beta}$, se obtiene que los campos transforman como

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} \\
\mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} \\
\mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma \left(\mathbf{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \mathbf{B} \right) \\
\mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \mathbf{E} \right)
\end{aligned}
$$

o equivalentemente como

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= \gamma \left(\mathbf{E} + \vec{\beta} \times \mathbf{B} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left(\vec{\beta} \cdot \mathbf{E} \right) \vec{\beta} \\
\mathbf{B}' &= \gamma \left(\mathbf{B} - \vec{\beta} \times \mathbf{E} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{B} \right) \vec{\beta}
\end{aligned}
$$

Problema 4

a) Si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares, lo mismo sucede en cualquier otro sistema inercial.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{E} + \vec{\beta} \times \mathbf{B}) \cdot \gamma(\mathbf{B} - \vec{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{E})\vec{\beta} \cdot \gamma(\mathbf{B} - \vec{\beta} \times \mathbf{E}) \\
&\quad - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{B})\vec{\beta} \cdot \gamma(\mathbf{E} + \vec{\beta} \times \mathbf{B}) + \frac{\gamma^4}{(\gamma+1)^2}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{B})(\vec{\beta} \cdot \mathbf{E})\beta^2 \\
&= \gamma^2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + \cancel{(\vec{\beta} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}} - \cancel{\mathbf{E} \cdot (\vec{\beta} \times \mathbf{E})} - (\vec{\beta} \times \mathbf{B}) \cdot (\vec{\beta} \times \mathbf{E})) \\
&\quad - \frac{\gamma^3}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{E})(\vec{\beta} \cdot \mathbf{B} - \cancel{\vec{\beta} \cdot (\vec{\beta} \times \mathbf{E})}) \\
&\quad - \frac{\gamma^3}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{B})(\vec{\beta} \cdot \mathbf{E} + \cancel{\vec{\beta} \cdot (\vec{\beta} \times \mathbf{B})}) + \frac{\gamma^4}{(\gamma+1)^2}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{B})(\vec{\beta} \cdot \mathbf{E})\beta^2
\end{aligned}
$$

Problema 4

Usando $(\vec{\beta} \times \mathbf{B}) \cdot (\vec{\beta} \times \mathbf{E}) = \beta^2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) - (\beta \cdot \mathbf{E})(\beta \cdot \mathbf{B})$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' &= \gamma^2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \beta^2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) + (\beta \cdot \mathbf{E})(\beta \cdot \mathbf{B})) - \frac{\gamma^3}{\gamma + 1}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{E})(\vec{\beta} \cdot \mathbf{B}) \\
&- \frac{\gamma^3}{\gamma + 1}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{B})(\vec{\beta} \cdot \mathbf{E}) + \frac{\gamma^4}{(\gamma + 1)^2}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{B})(\vec{\beta} \cdot \mathbf{E})\beta^2 \\
&= \cancel{\gamma^2(1 - \beta^2)}\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + \left[\gamma^2 - \frac{2\gamma^3}{\gamma + 1} + \frac{\gamma^4}{(\gamma + 1)^2}\beta^2\right](\beta \cdot \mathbf{E})(\beta \cdot \mathbf{B})
\end{aligned}$$

usando $\gamma^2\beta^2 = \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)} = \frac{1}{(1-\beta^2)} - 1 = \gamma^2 - 1 = (\gamma + 1)(\gamma - 1)$ obtenemos

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + \cancel{\left[\frac{(\gamma + 1) - 2\gamma + (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}\right]}\gamma^2(\beta \cdot \mathbf{E})(\beta \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

Problema 4

b) La relación de orden entre $|\mathbf{E}|$ y $|\mathbf{B}|$ es la misma en todos los sistemas.

Recordando que $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(E^2 - B^2)$ es un invariante tenemos que si

$$|E| > |B|$$

en un sistema entonces

$$E'^2 - B'^2 = E^2 - B^2 > 0$$

de donde concluimos que

$$|E'| > |B'|$$

en cualquier otro sistema.

Problema 4

c) Si $\mathbf{E}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces puede encontrarse un sistema en el cual, asociado al mismo evento, o bien sólo hay campo eléctrico o bien solamente campo magnético. ¿Es único?

Problema 4

c) Si $\mathbf{E}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces puede encontrarse un sistema en el cual, asociado al mismo evento, o bien sólo hay campo eléctrico o bien solamente campo magnético. ¿Es único?

Invariantes

$$0 \neq E^2 - B^2 = E'^2 - B'^2$$

supongamos que $E^2 - B^2 < 0$ entonces si $\mathbf{E}' = 0$ sigue valiendo $-B'^2 < 0$.

Problema 4

c) Si $\mathbf{E}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces puede encontrarse un sistema en el cual, asociado al mismo evento, o bien sólo hay campo eléctrico o bien solamente campo magnético. ¿Es único?

Invariantes

$$0 \neq E^2 - B^2 = E'^2 - B'^2$$

supongamos que $E^2 - B^2 < 0$ entonces si $\mathbf{E}' = 0$ sigue valiendo $-B'^2 < 0$.Además se satisface el invariante

$$0 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}'. \tag{1}$$

Problema 4

c) Si $\mathbf{E}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces puede encontrarse un sistema en el cual, asociado al mismo evento, o bien sólo hay campo eléctrico o bien solamente campo magnético. ¿Es único?

Invariantes

$$0 \neq E^2 - B^2 = E'^2 - B'^2$$

supongamos que $E^2 - B^2 < 0$ entonces si $\mathbf{E}' = 0$ sigue valiendo $-B'^2 < 0$.Además se satisface el invariante

$$0 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}'. \tag{1}$$

Tratemos de anular el campo eléctrico

$$0 = \mathbf{E}'_{||} = \mathbf{E}_{||} \implies \vec{\beta} \perp \mathbf{E} \implies \vec{\beta} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{2}$$

Problema 4

c) Si $\mathbf{E}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces puede encontrarse un sistema en el cual, asociado al mismo evento, o bien sólo hay campo eléctrico o bien solamente campo magnético. ¿Es único?

Invariantes

$$0 \neq E^2 - B^2 = E'^2 - B'^2$$

supongamos que $E^2 - B^2 < 0$ entonces si $\mathbf{E}' = 0$ sigue valiendo $-B'^2 < 0$.Además se satisface el invariante

$$0 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}'. \tag{1}$$

Tratemos de anular el campo eléctrico

$$0 = \mathbf{E}'_{||} = \mathbf{E}_{||} \implies \vec{\beta} \perp \mathbf{E} \implies \vec{\beta} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{2}$$

$$0 = \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \mathbf{B}) \implies \mathbf{E} = -\vec{\beta} \times \mathbf{B} \tag{3}$$

Problema 4

Como $\vec{\beta} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0$, la dirección de $\mathbf{E}$ ya es correcta y su módulo viene dado por

$$E = \beta B \sin\theta, \tag{4}$$

siendo θ en ángulo entre $\mathbf{B}$ y $\vec{\beta}$.

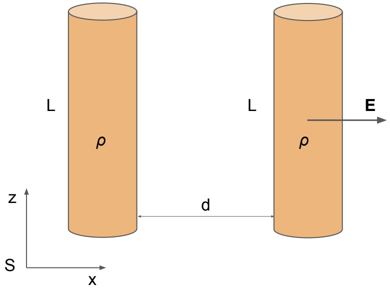
Problema 4

Como $\vec{\beta} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0$, la dirección de $\mathbf{E}$ ya es correcta y su módulo viene dado por

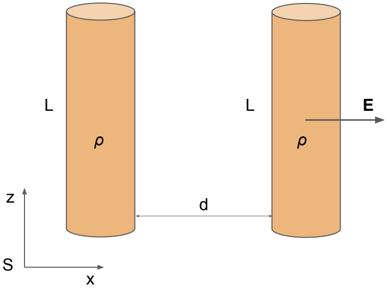
$$E = \beta B \sin\theta, \tag{4}$$

siendo θ en ángulo entre $\mathbf{B}$ y $\vec{\beta}$. Entonces cualquier que satisfaga esta ecuación verifica la ecuación vectorial a menos de un signo.

Problema 10

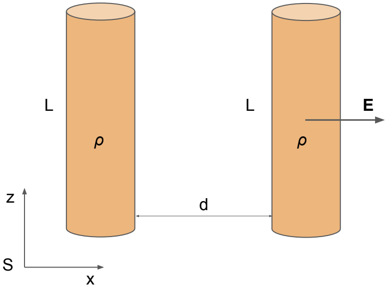


Problema 10

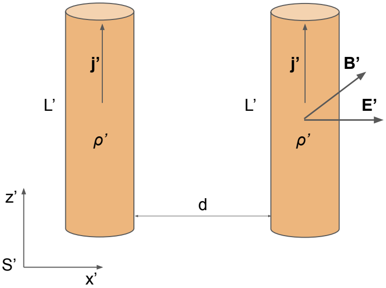


Boost en z $\uparrow$

Problema 10



Boost en z $\uparrow$



Problema 10

En S:

$$j^\mu = (c\rho, \vec{0})$$

Y la fuerza es puramente eléctrostática.

Problema 10

En S:

$$j^\mu = (c\rho, \vec{0})$$

Y la fuerza es puramente eléctrostática.El campo de un cilindro viene dado por

$$\vec{E} = \frac{4\pi Q_{enc}}{S}\hat{r} = 4\pi\frac{\pi a^2 L\rho}{2\pi L r}\hat{r} = 2\pi\rho\frac{a^2}{r}\hat{r}, \quad \text{si } r \geq a.$$

Problema 10

En S:

$$j^{\mu} = (c\rho, \vec{0})$$

Y la fuerza es puramente eléctrostática.El campo de un cilindro viene dado por

$$\vec{E} = \frac{4\pi Q_{enc}}{S}\hat{r} = 4\pi\frac{\pi a^2 L\rho}{2\pi L r}\hat{r} = 2\pi\rho\frac{a^2}{r}\hat{r}, \quad \text{si } r \geq a.$$

Y la fuerza es entonces

$$d\vec{F} = Edq = (2\pi\rho\frac{a^2}{d})(\rho\pi a^2 dz)\hat{x}$$

Problema 10

En S:

$$j^{\mu} = (c\rho, \vec{0})$$

Y la fuerza es puramente eléctrostática.El campo de un cilindro viene dado por

$$\vec{E} = \frac{4\pi Q_{enc}}{S}\hat{r} = 4\pi\frac{\pi a^2 L\rho}{2\pi L r}\hat{r} = 2\pi\rho\frac{a^2}{r}\hat{r}, \quad \text{si } r \geq a.$$

Y la fuerza es entonces

$$d\vec{F} = Edq = (2\pi\rho\frac{a^2}{d})(\rho\pi a^2 dz)\hat{x}$$

$$\vec{F}_{12} = \int_0^L 2\frac{(\pi a^2\rho)^2}{d}dz\hat{x} = L2\frac{(\pi a^2\rho)^2}{d}\hat{x}$$

Problema 10

En S:

$$j^\mu = (c\rho, \vec{0})$$

Y la fuerza es puramente eléctrostática.El campo de un cilindro viene dado por

$$\vec{E} = \frac{4\pi Q_{enc}}{S}\hat{r} = 4\pi\frac{\pi a^2 L\rho}{2\pi L r}\hat{r} = 2\pi\rho\frac{a^2}{r}\hat{r}, \quad \text{si } r \geq a.$$

Y la fuerza es entonces

$$d\vec{F} = Edq = (2\pi\rho\frac{a^2}{d})(\rho\pi a^2 dz)\hat{x}$$

$$\vec{F}_{12} = \int_0^L 2\frac{(\pi a^2\rho)^2}{d}dz\hat{x} = L2\frac{(\pi a^2\rho)^2}{d}\hat{x}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\vec{F}_{12}}{L} = 2\frac{(\pi a^2\rho)^2}{d}\hat{x}}$$

Problema 10

En S' hallamos la cuadricorriente haciendo un boost en z:

$$j'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} j^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c\rho \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma\beta c\rho \end{pmatrix}$$

Problema 10

En S' hallamos la cuadricorriente haciendo un boost en z:

$$j'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} j^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c\rho \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma\beta c\rho \end{pmatrix}$$

$$\rho' = \gamma\rho$$
$$\vec{j}' = -\gamma\beta c\rho\hat{z}$$

Problema 10

En S' hallamos la cuadricorriente haciendo un boost en z:

$$j'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} j^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c\rho \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma\beta c\rho \end{pmatrix}$$

$$\rho' = \gamma\rho$$
$$\vec{j}' = -\gamma\beta c\rho\hat{z}$$

La fuerza electrostática se calcula igual que antes cambiando $\rho \to \rho'$ y $L \to L'$

$$\boxed{\frac{\vec{F}_{12}^{\text{elec}\prime}}{L'} =} 2\frac{(\pi a^2\rho')^2}{d}\hat{x} = \boxed{2\gamma^2\frac{(\pi a^2\rho)^2}{d}\hat{x}}.$$

Problema 10

En S' hallamos la cuadricorriente haciendo un boost en z:

$$j'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} j^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c\rho \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma\beta c\rho \end{pmatrix}$$

$$\rho' = \gamma\rho$$
$$\vec{j}' = -\gamma\beta c\rho\hat{z}$$

La fuerza electrostática se calcula igual que antes cambiando $\rho \to \rho'$ y $L \to L'$

$$\boxed{\frac{\vec{F}_{12}^{\text{elec}\prime}}{L'} =} 2\frac{(\pi a^2\rho')^2}{d}\hat{x} = \boxed{2\gamma^2\frac{(\pi a^2\rho)^2}{d}\hat{x}}.$$

Mientras que la magnética viene dada por

$$\vec{F}_{12}^{\text{mag}\prime} = \frac{1}{c}\int_0^L dl\vec{I}' \times \vec{B}'.$$

Problema 10

La corriente uniforme genera un campo magnético análogo al de un hilo de corriente

$$\vec{B}' = \frac{4\pi}{c}\frac{I}{2\pi r}\hat{\theta} = \frac{2}{c}\frac{(-\gamma\beta c\rho)(\pi a^2)}{r'}\hat{y} = -\frac{2\gamma\beta\rho\pi a^2}{r'}\hat{y}$$

Problema 10

La corriente uniforme genera un campo magnético análogo al de un hilo de corriente

$$\vec{B}' = \frac{4\pi}{c}\frac{I}{2\pi r}\hat{\theta} = \frac{2}{c}\frac{(-\gamma\beta c\rho)(\pi a^2)}{r'}\hat{y} = -\frac{2\gamma\beta\rho\pi a^2}{r'}\hat{y}$$

Dando lugar a la fuerza magnética

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12}^{\mathsf{mag}\prime} &= \frac{1}{c}\int_0^{L'} dz\,(-\gamma\beta c\rho\hat{z})\,(\pi a^2)\times\left(-\frac{2\gamma\beta\rho\pi a^2}{r'}\hat{y}\right)\\ &= -L'\beta^2\frac{2(\gamma\rho\pi a^2)^2}{d}\hat{x}\end{aligned}$$

Problema 10

La corriente uniforme genera un campo magnético análogo al de un hilo de corriente

$$\vec{B}' = \frac{4\pi}{c}\frac{I}{2\pi r}\hat{\theta} = \frac{2}{c}\frac{(-\gamma\beta c\rho)(\pi a^2)}{r'}\hat{y} = -\frac{2\gamma\beta\rho\pi a^2}{r'}\hat{y}$$

Dando lugar a la fuerza magnética

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12}^{\mathsf{mag}\prime} &= \frac{1}{c}\int_0^{L'} dz\,(-\gamma\beta c\rho\hat{z})\,(\pi a^2) \times \left(-\frac{2\gamma\beta\rho\pi a^2}{r'}\hat{y}\right) \\ &= -L'\beta^2\frac{2(\gamma\rho\pi a^2)^2}{d}\hat{x}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\vec{F}_{12}^{\mathsf{mag}\prime}}{L'} = -\beta^2\frac{2(\gamma\rho\pi a^2)^2}{d}\hat{x}}$$

Problema 10

La corriente uniforme genera un campo magnético análogo al de un hilo de corriente

$$\vec{B}' = \frac{4\pi}{c}\frac{I}{2\pi r}\hat{\theta} = \frac{2}{c}\frac{(-\gamma\beta c\rho)(\pi a^2)}{r'}\hat{y} = -\frac{2\gamma\beta\rho\pi a^2}{r'}\hat{y}$$

Dando lugar a la fuerza magnética

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12}^{\text{mag}\prime} &= \frac{1}{c}\int_0^{L'} dz\,(-\gamma\beta c\rho\hat{z})\,(\pi a^2) \times \left(-\frac{2\gamma\beta\rho\pi a^2}{r'}\hat{y}\right) \\ &= -L'\beta^2\frac{2(\gamma\rho\pi a^2)^2}{d}\hat{x}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\vec{F}_{12}^{\text{mag}\prime}}{L'} = -\beta^2\frac{2(\gamma\rho\pi a^2)^2}{d}\hat{x}}$$

La fuerza total es entonces

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{\vec{F}'_{12}}{L'}} &= \frac{\vec{F}_{12}^{\text{elec}\prime}}{L'} + \frac{\vec{F}_{12}^{\text{mag}\prime}}{L'} = \frac{2(\gamma\pi a^2\rho)^2}{d}(1-\beta^2)\hat{x} \\ &= \frac{2(\pi a^2\rho)^2}{d}\hat{x} \boxed{= \frac{\vec{F}_{12}}{L}}\end{aligned}$$

Problema 10

Otra forma era transformando directamente los campos

$$\vec{E} = 2\pi\rho\frac{a^2}{r}\hat{r}$$
$$\vec{B} = 0$$

Problema 10

Otra forma era transformando directamente los campos

$$\vec{E} = 2\pi\rho\frac{a^2}{r}\hat{r}$$
$$\vec{B} = 0$$

y como $\vec{E} \perp \vec{\beta}$ tenemos

$$\vec{E}' = \gamma\left(\vec{E}_\perp + \cancel{\vec{\beta} \times \vec{B}}\right) = 2\pi(\gamma\rho)\frac{a^2}{r}\hat{r}$$
$$\vec{B}' = \gamma\left(\cancel{\vec{B}_\perp} - \vec{\beta} \times \vec{E}\right) = -\frac{1}{c}(\gamma\beta c\rho)\frac{a^2}{r}\hat{\theta}$$

y calcular la fuerza usando el tensor de Maxwell.

Problema 10

Otra forma más es usando que la densidad de fuerza covariante

$$f^{\mu} = \frac{1}{c} F^{\mu}_{\ \nu} j^{\nu}$$

es un cuadrivector.

Problema 10

Otra forma más es usando que la densidad de fuerza covariante

$$f^{\mu} = \frac{1}{c} F^{\mu}_{\ \nu} j^{\nu}$$

es un cuadrivector.

$$f^{\mu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\vec{j} \cdot \vec{E}}{c}, \rho \vec{E} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{c} \right)$$

Problema 10

Otra forma más es usando que la densidad de fuerza covariante

$$f^{\mu} = \frac{1}{c} F^{\mu}_{\ \nu} j^{\nu}$$

es un cuadrivector.

$$f^{\mu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\vec{j} \cdot \vec{E}}{c}, \rho \vec{E} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{c} \right)$$

Así la densidad de fuerza en S es

$$f^{\mu} = \left(0, \rho 2\pi\rho \frac{a^2}{d}, 0, 0 \right)$$

Problema 10

Otra forma más es usando que la densidad de fuerza covariante

$$f^\mu = \frac{1}{c} F^\mu_{\ \nu} j^\nu$$

es un cuadrivector.

$$f^\mu = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\vec{j}\cdot\vec{E}}{c}, \rho\vec{E} + \frac{\vec{j}\times\vec{B}}{c} \right)$$

Así la densidad de fuerza en S es

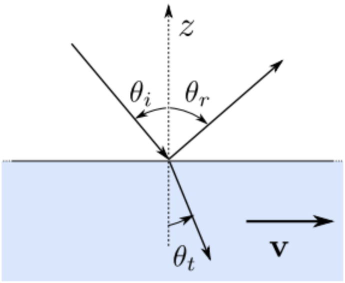
$$f^\mu = \left(0, \rho 2\pi\rho \frac{a^2}{d}, 0, 0\right)$$

Mientras que en S' la hallamos haciendo un boost en z

$$f^{\mu\prime} = \Lambda^\mu_{\ \nu} f^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho 2\pi\rho\frac{a^2}{d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho 2\pi\rho\frac{a^2}{d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

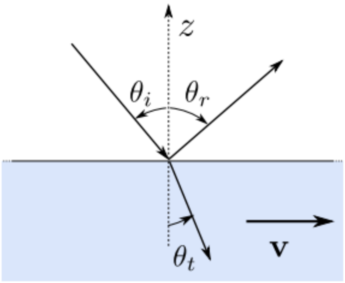
Problema 6

En el sistema del laboratorio S tenemos una onda plana de frecuencia ω y amplitud $\vec{E}_i$ que incide en un medio líquido con índice de refracción n $(\mu = 1)$ y polarización TE.



Problema 6

En el sistema del laboratorio S tenemos una onda plana de frecuencia ω y amplitud $\vec{E}_i$ que incide en un medio líquido con índice de refracción n ($\mu = 1$) y polarización TE.



Para resolver el problema lo que haremos será movernos al sistema S' donde el fluido está en reposo y obtenedremos así los campos.

Usamos $\vec{\beta} = \frac{v}{c}\hat{x}$.

Problema 6

En S tenemos

$$\vec{E}_i = -\hat{y}E_i e^{-ik_\mu x^\mu}, \quad k_\mu = (\frac{\omega}{c}, -\vec{k}_i),$$

$$\vec{k}_i = \omega/c(\sin\theta_i\hat{x} - \cos\theta_i\hat{z}) = (\omega/c\sin\theta_i, 0, \omega/c\cos\theta_i)$$

Problema 6

En S tenemos

$$\vec{E}_i = -\hat{y} E_i e^{-ik_\mu x^\mu}, \quad k_\mu = (\frac{\omega}{c}, -\vec{k}_i),$$

$$\vec{k}_i = \omega/c(\sin\theta_i \hat{x} - \cos\theta_i \hat{z}) = (\omega/c \sin\theta_i, 0, \omega/c \cos\theta_i)$$

Una vez tengamos los campos $\vec{E}'_r$ y $\vec{E}'_t$ en el sistema S' los transformaremos de nuevo a S. En el sistema S' como el medio está en reposo podemos usar los coeficientes de fresnel que aprendimos antes.

Problema 6

Si les confunde qué boost hacer recuerden que queremos enviar la cuadrivelocidad $U^\mu = \gamma(c, v, 0, 0)$ a una U' con componentes 1 a 3 nulas

$$U'^\mu = \Lambda^\mu_\nu U^\nu$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma \\ v\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 c - \beta\gamma v\gamma \\ v\gamma^2 - \beta\gamma^2 c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} c - \beta v \\ v - \beta c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problema 6

Si les confunde qué boost hacer recuerden que queremos enviar la cuadrivelocidad $U^\mu = \gamma(c, v, 0, 0)$ a una U' con componentes 1 a 3 nulas

$$U'^\mu = \Lambda^\mu_\nu U^\nu$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma \\ v\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 c - \beta\gamma v\gamma \\ v\gamma^2 - \beta\gamma^2 c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} c - \beta v \\ v - \beta c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformamos entonces el campo incidente $\vec{E}_i$ en S al campo $\vec{E}'_i$ incidente en S'

$$\vec{E}'_i = \gamma(\vec{E}_i + \vec{\beta} \times \vec{B}_i) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\cancel{(\vec{\beta} \cdot \vec{E}_i)}\vec{\beta} = \gamma(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}_i)\vec{E}_i$$

Problema 6

Si les confunde qué boost hacer recuerden que queremos enviar la cuadrivelocidad $U^\mu = \gamma(c, v, 0, 0)$ a una U' con componentes 1 a 3 nulas

$$U'^\mu = \Lambda^\mu_\nu U^\nu$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma \\ v\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 c - \beta\gamma v\gamma \\ v\gamma^2 - \beta\gamma^2 c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} c - \beta v \\ v - \beta c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformamos entonces el campo incidente $\vec{E}_i$ en S al campo $\vec{E}'_i$ incidente en S'

$$\vec{E}'_i = \gamma(\vec{E}_i + \vec{\beta} \times \vec{B}_i) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\cancel{(\vec{\beta} \cdot \vec{E}_i)}\vec{\beta} = \gamma(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}_i)\vec{E}_i$$

usando

$$\vec{\beta} \times \vec{B}_i = \vec{\beta} \times (\hat{k}_i \times \vec{E}_i) = \cancel{\vec{\beta}(\hat{k}_i \cdot \vec{E}_i)} - (\vec{\beta} \cdot \hat{k}_i)\vec{E}_i = -(\beta \sin\theta_i)\vec{E}_i.$$

Notemos que el nuevo campo eléctrico va en la misma dirección que el original y por lo tanto la polarización sigue siendo TE.

Problema 6

El vector de onda en este sistema es

$$\vec{k}_i'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\vec{k}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c \\ \omega/c\sin\theta_i \\ 0 \\ -\omega/c\cos\theta_i \end{pmatrix}$$

Problema 6

El vector de onda en este sistema es

$$\vec{k}_i'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\vec{k}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c \\ \omega/c\sin\theta_i \\ 0 \\ -\omega/c\cos\theta_i \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{array}{c} \omega' = \gamma(1-\beta\sin\theta_i)\omega \\ \vec{k}_i' = \omega/c(\gamma(\sin\theta_i - \beta)\hat{x} - \cos\theta_i\hat{z}) \end{array}$$

Problema 6

El vector de onda en este sistema es

$$\vec{k}_i'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\vec{k}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c \\ \omega/c \sin\theta_i \\ 0 \\ -\omega/c\cos\theta_i \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} \omega' &= \gamma(1-\beta\sin\theta_i)\omega \\ \vec{k}_i' &= \omega/c(\gamma(\sin\theta_i - \beta)\hat{x} - \cos\theta_i\hat{z}) \end{aligned}$$

$$\vec{k}_i' = \frac{\omega'/c}{\gamma(1-\beta\sin\theta_i)}(\gamma(\sin\theta_i - \beta)\hat{x} - \cos\theta_i\hat{z})$$

como además debemos tener

$$\vec{k}_i' = \omega'/c(\sin\theta_i'\hat{x} - \cos\theta_i'\hat{z})$$

Problema 6

El vector de onda en este sistema es

$$\vec{k}_i'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\vec{k}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c \\ \omega/c \sin\theta_i \\ 0 \\ -\omega/c\cos\theta_i \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{matrix} \omega' = \gamma(1-\beta\sin\theta_i)\omega \\ \vec{k}_i' = \omega/c(\gamma(\sin\theta_i - \beta)\hat{x} - \cos\theta_i\hat{z}) \end{matrix}$$

$$\vec{k}_i' = \frac{\omega'/c}{\gamma(1-\beta\sin\theta_i)}(\gamma(\sin\theta_i - \beta)\hat{x} - \cos\theta_i\hat{z})$$

como además debemos tener

$$\vec{k}_i' = \omega'/c(\sin\theta_i'\hat{x} - \cos\theta_i'\hat{z})$$

tenemos

$$\sin\theta_i' = \frac{\sin\theta_i - \beta}{1-\beta\sin\theta_i}$$

$$\cos\theta_i' = \frac{\cos\theta_i}{\gamma(1-\beta\sin\theta_i)}$$

se puede ver comprobar que $\sin^2\theta_i' + \cos^2\theta_i' = 1$.

Ahora podemos usar lo que ya sabíamos con el medio en reposo

$$\theta'_r = \theta'_i$$
$$\sin\theta'_i = n\sin\theta'_t$$

Problema 6

Ahora podemos usar lo que ya sabíamos con el medio en reposo

$$\theta_r' = \theta_i'$$
$$\sin\theta_i' = n\sin\theta_t'$$

Y los campos vienen dados por los coeficientes de Fresnel

$$E_r' = R_{12}'E_i' = \frac{n_i\cos\theta_i' - n_t\cos\theta_t'}{n_i\cos\theta_i' + n_t\cos\theta_t'}E_i' = \frac{\cos\theta_i - \gamma(1-\beta\sin\theta_i)\sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \gamma(1-\beta\sin\theta_i)\sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}(1-\beta\sin\theta_i)\gamma E_i$$
$$E_t' = T_{12}'E_i' = \frac{2n_1\cos\theta_i'}{n_1\cos\theta_i' + n_2\cos\theta_t'}E_i' = \frac{2\gamma(1-\beta\sin\theta_i)\cos\theta_i}{\gamma(1-\beta\sin\theta_i)\cos\theta_i + \sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}(1-\beta\sin\theta_i)\gamma E_i$$

Problema 6

Además la dirección del vector de onda reflejado es por trigonometría

$$\hat{k}_r' = \sin\theta_i'\hat{x} + \cos\theta_i'\hat{z} = \frac{\sin\theta_i - \beta}{1 - \beta\sin\theta_i}\hat{x} + \frac{\cos\theta_i}{\gamma(1 - \beta\sin\theta_i)}\hat{z}$$

Problema 6

Además la dirección del vector de onda reflejado es por trigonometría

$$\hat{k}_r' = \sin\theta_i'\hat{x} + \cos\theta_i'\hat{z} = \frac{\sin\theta_i - \beta}{1-\beta\sin\theta_i}\hat{x} + \frac{\cos\theta_i}{\gamma(1-\beta\sin\theta_i)}\hat{z}$$

Mientras que, usando Snell, la del transmitido es

$$\begin{aligned}\hat{k}_t' &= \sin\theta_t'\hat{x} - \cos\theta_t'\hat{z} = \frac{\sin\theta_i'}{n}\hat{x} - \sqrt{1-\sin^2\theta_t'}\hat{z} \\ &= \frac{1}{n}\frac{\sin\theta_i - \beta}{1-\beta\sin\theta_i}\hat{x} - \sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\frac{\sin\theta_i-\beta}{1-\beta\sin\theta_i}\right)^2}\hat{z}\end{aligned}$$

Problema 6

Además la dirección del vector de onda reflejado es por trigonometría

$$\hat{k}'_r = \sin\theta'_i \hat{x} + \cos\theta'_i \hat{z} = \frac{\sin\theta_i - \beta}{1 - \beta\sin\theta_i}\hat{x} + \frac{\cos\theta_i}{\gamma(1 - \beta\sin\theta_i)}\hat{z}$$

Mientras que, usando Snell, la del transmitido es

$$\begin{aligned}\hat{k}'_t &= \sin\theta'_t \hat{x} - \cos\theta'_t \hat{z} = \frac{\sin\theta'_i}{n}\hat{x} - \sqrt{1 - \sin^2\theta'_t}\hat{z} \\ &= \frac{1}{n}\frac{\sin\theta_i - \beta}{1 - \beta\sin\theta_i}\hat{x} - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\frac{\sin\theta_i - \beta}{1 - \beta\sin\theta_i}\right)^2}\hat{z}\end{aligned}$$

(Otra forma es obtener los ángulos usando la fórmula de aberración relativista para pasar a S' usar snell y volver con a S la misma fórmula.)

Problema 6

Volvemos al sistema S con la transformación inversa $(-\vec{\beta})$

Problema 6

Volvemos al sistema S con la transformación inversa $(-\vec{\beta})$

$$\vec{E}_r = \gamma(\vec{E}'_r - \vec{\beta} \times \vec{B}'_r) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\cancel{(\vec{\beta} \cdot \vec{E}'_r)\vec{\beta}}$$

$$\vec{E}_t = \gamma(\vec{E}'_t - \vec{\beta} \times \vec{B}'_t) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\cancel{(\vec{\beta} \cdot \vec{E}'_t)\vec{\beta}}$$

Problema 6

Volvemos al sistema S con la transformación inversa $(-\vec{\beta})$

$$\vec{E}_r = \gamma(\vec{E}'_r - \vec{\beta} \times \vec{B}'_r) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\cancel{(\vec{\beta}\cdot\vec{E}'_r)}\vec{\beta}$$

$$\vec{E}_t = \gamma(\vec{E}'_t - \vec{\beta} \times \vec{B}'_t) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\cancel{(\vec{\beta}\cdot\vec{E}'_t)}\vec{\beta}$$

Si además usamos como antes

$$\vec{\beta} \times \vec{B}'_r = \vec{\beta} \times (\hat{k}'_r \times \vec{E}'_r) = -\beta \sin\theta'_i \vec{E}'_r$$
$$\vec{\beta} \times \vec{B}'_t = \vec{\beta} \times (n\hat{k}'_t \times \vec{E}'_t) = -\beta n \sin\theta'_t \vec{E}'_t$$

Problema 6

Volvemos al sistema S con la transformación inversa $(-\vec{\beta})$

$$\vec{E}_r = \gamma(\vec{E}'_r - \vec{\beta} \times \vec{B}'_r) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\cancel{(\vec{\beta}\cdot\vec{E}'_r)}\vec{\beta}$$

$$\vec{E}_t = \gamma(\vec{E}'_t - \vec{\beta} \times \vec{B}'_t) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\cancel{(\vec{\beta}\cdot\vec{E}'_t)}\vec{\beta}$$

Si además usamos como antes

$$\vec{\beta} \times \vec{B}'_r = \vec{\beta} \times (\hat{k}'_r \times \vec{E}'_r) = -\beta \sin\theta'_i \vec{E}'_r$$
$$\vec{\beta} \times \vec{B}'_t = \vec{\beta} \times (n\hat{k}'_t \times \vec{E}'_t) = -\beta n \sin\theta'_t \vec{E}'_t$$

Tenemos

$$\boxed{E_r} = \gamma(\vec{E}'_r + \vec{\beta} \times \vec{B}'_r) = \gamma(1+\beta\sin\theta'_i)E'_r$$

$$\boxed{= \gamma\left(1+\beta\frac{\sin\theta_i - \beta}{1-\beta\sin\theta_i}\right)\left(\frac{\cos\theta_i - \gamma(1-\beta\sin\theta_i)\sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \gamma(1-\beta\sin\theta_i)\sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}\right)(1-\beta\sin\theta_i)\gamma E_i}$$

Problema 10

Si el campo se anula en S se anula también en S'. El ángulo de Brewster venía dado por

$$\tan \theta'_B = \frac{n_2}{n_1} = n$$

Problema 10

Si el campo se anula en S se anula también en S'. El ángulo de Brewster venía dado por

$$\tan\theta'_B = \frac{n_2}{n_1} = n$$

Reemplazando las relaciones que encontramos para los ángulos

$$\frac{\frac{\sin\theta_B - \beta}{1-\beta\sin\theta_B}}{\frac{\cos\theta_B}{\gamma(1-\beta\sin\theta_B)}} = n$$

$$\gamma\frac{\sin\theta_B - \beta}{\cos\theta_B} = n \tag{5}$$