Función de Green, método de imágenes y separación de variables.

Método de imágenes y función de Green.

1. Una esfera conductora de radio a está conectada a potencial V y rodeada por una cáscara esférica de radio b cargada uniformemente con densidad σ.

   a) Hallar el potencial electrostático en todo punto del espacio mediante el método de imágenes

   b) Encontrar la distribución de cargas imagen y la carga total inducida sobre la esfera conductora. ¿Es única la distribución de cargas imagen que resuelve el problema?

2. *a*) Hallar el potencial electrostático de la distribución del problema anterior utilizando el método de la función de Green.

   b) Analizar la relación entre el método de imágenes y el de la función de Green. Identificar la procedencia de cada una de las tres contribuciones a la integral de Green.

3. *a*) Una esfera de radio a está conectada a tierra. A una distancia de su centro $d > a$, hay un dipolo puntual $\mathbf{p}$ (radial a la esfera). Calcular el potencial en todo punto del espacio usando el método de la función de Green.

   b) idem (a) pero mediante el método de imágenes. Verificar que ambos resultados coinciden.

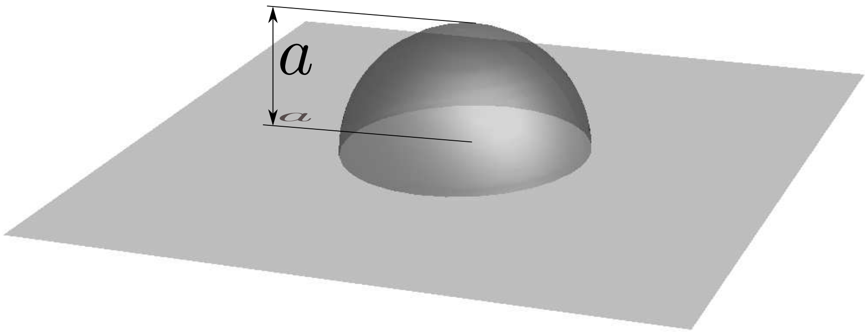
   c) Calcular la densidad de carga inducida sobre la esfera y la carga total.

   d) Escribir el potencial para $r \gg a$ conservando términos de hasta orden $(a/r)^3$. Interprete en términos de la carga total y del momento dipolar total de las cargas fuentes e imágenes.

   e) Encuentre ahora el potencial en el caso en que la esfera está aislada y descargada.

4. Hallar la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región interna entre dos esferas concéntricas de radios a y b respectivamente. Utilizar el método de imágenes.
   Sugerencia: es necesario usar una serie infinita de imágenes. Hallar primero una relación de recurrencia para las ubicaciones y los módulos de las cargas imágenes y luego escribir la superposición adecuada.

5. Un contorno mixto consiste en un plano infinito y una semiesfera de radio a, como muestra la figura.

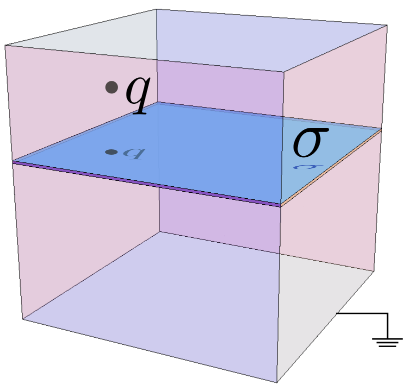


   a) Calcular la función de Green de Dirichlet de esta configuración en la región por encima del contorno. Identificar cada contribución.

   b) Se coloca un dipolo puntual a una distancia d sobre la semiesfera, apuntando en la dirección perpendicular al plano. Hallar el potencial en el semiespacio donde se encuentra el dipolo, utilizando la función de Green hallada en el punto anterior.

Método de separación de variables.

6. Un cubo de lado a está conectado a tierra. En su interior hay un cuadrado con densidad superficial uniforme σ y una carga puntual q. Calcule el potencial en *todo el espacio*.



7. Un alambre con densidad de carga constante λ está equidistante a dos placas conductoras infinitas conectadas a tierra. Utilizando separación de variables, encuentre el potencial en *todo el espacio*. Para ello divida la región entre las placas de los siguientes modos:

   a) Con un corte vertical perpendicular a los planos.

   b) Con un corte horizontal paralelo a los planos.

   c) Compare las dos soluciones. ¿Se atreverá a demostrar su igualdad?

d) Tanto la integral como la suma de Fourier que han aparecido al aplicar las dos separaciones pueden hacerse de manera explícita y la solución es una función simple. Encuentre esa función.

8. Se pide hallar el potencial y el campo electrostático en todo punto del espacio producido por un cuadrado cargado con densidad uniforme σ. Puede asumirse que el cuadrado está sobre el plano xy, que su centro coincide con el origen y que sus lados están alineados con los ejes x e y. Utilice los siguientes métodos:

   a) Separación de variables dividiendo el problema en dos zonas.

   b) Escribir primero el potencial de una carga puntual como una integral de Fourier bidimensional en x e y, y luego construir la solución para el cuadrado usando superposición.

   c) Escribir primero el potencial de una carga puntual como una integral de Fourier tridimensional, y luego construir la solución para el cuadrado por superposición.

9. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuya mitad superior está conectada a un potencial V_1 y la inferior a V_2.
   Sugerencia: puede resolver el problema directamente, o descomponerlo en suma de algo par más algo impar; esto simplifica las integrales.

10. *a*) Encontrar el potencial de una carga puntual q entre dos cáscaras esféricas conductoras, concéntricas y conectadas a tierra, de radios a y b respectivamente.

    b) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre cada esfera.

    c) Observar qué sucede cuando se hace tender el radio de la esfera exterior a infinito ¿Cuánto valen las cargas totales inducidas en ese caso?

    d) Resolver el problema en el caso en que el potencial de las esferas se eleva a V_1 y V_2, respectivamente.

    e) Resolver el problema en el caso en que las esferas están aisladas y tienen una carga total Q_1 y Q_2, respectivamente.

11. Un cilindro de radio a y altura h tiene su cara lateral a tierra, mientras que las tapas están a potenciales V y $-V$. Hallar el potencial en el interior del cilindro.

12. *a*) Usando separación de variables en coordenadas cilíndricas, hallar el potencial y el campo electrostático producidos por un disco de radio a cargado con densidad uniforme σ.

    b) A través de límites adecuados, verificar que la expresión obtenida se reduce en un caso a la de una carga puntual, y en otro a la de un plano infinito.

    c) ¿El disco puede ser conductor? ¿Por qué?

Problemas de Green relacionados con separación de variables.

13. Una esfera de radio a está a tierra. Concéntrico con ella hay un anillo de radio $b > a$, cargado uniformemente con carga total Q.

    a) Calcular el potencial en todo punto del espacio usando el método de la función de Green.

    b) Calcular el potencial sobre el eje perpendicular al plano del anillo, utilizando el método de imágenes. Luego, extender la solución para todos los puntos exteriores a la esfera mediante prolongación analítica. Comparar con el resultado del punto (a).

    c) Calcular el potencial usando separación de variables y comparar con los resultados anteriores.

    d) Separar, en la expresión para el potencial, la contribución debida al anillo cargado y a las cargas inducidas. Halle los momentos multipolares, hasta el orden cuadrupolar inclusive, del anillo cargado y de las cargas inducidas por separado.

    e) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre la esfera. ¿Qué tiene esto que ver con el método de imágenes?

    f) ¿Cómo resolvería por el método de Green si la esfera estuviera aislada y descargada?

    Fórmulas útiles: $P_{2n+1}(0) = 0$, $P_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{2^n n!}$, $P_0(x) = 1$.

14. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de un cilindro circular de radio a y longitud L, separando en regiones de las siguientes maneras:

    a) Cortando con un plano perpendicular al eje del cilindro.

    b) Cortando con un cilindro coaxial al cilindro original.

15. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de una estructura con forma de cuarto de cilindro circular, infinito y de radio a.

16. *a*) Utilizando separación de variables en coordenadas cilíndricas, calcular la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región interna entre dos planos infinitos, ubicados en $z = 0$ y $z = L$.

    b) Si se coloca una carga q a una altura z entre los planos, obtener una expresión para la densidad de carga y calcular explícitamente la carga total inducida sobre cada plano.

Preguntas conceptuales.

1. ¿Cuál es el significado físico de la función de Green?
2. ¿Qué relación hay entre el método de la función de Green y el método de imágenes?
3. ¿Cómo se complementan estos dos métodos en la resolución de los problemas?
4. ¿Dónde deben colocarse las cargas imágenes?
5. Una vez colocadas las cargas imágenes, ¿qué sucede con los contornos?
6. ¿Qué relación hay entre la carga total de la distribución imagen y la carga inducida sobre el contorno?
7. Explicar las diferencias entre una solución de la ecuación de Poisson (inhomogénea), de Laplace (dividiendo en zonas) y una solución hallada por superposición. ¿Qué pasa con las condiciones de contorno?