

## Medios materiales y desarrollo multipolar.

### Medios dieléctricos.

1. Considere una esfera dieléctrica de radio  $a$  y permitividad  $\varepsilon_1$  sumergida en otro medio de permitividad  $\varepsilon_2$ . A una distancia  $d < a$  del centro de la esfera se encuentra una carga  $q$ .
  - a) Halle el potencial electrostático en todo punto del espacio.
  - b) Halle las densidades de carga de polarización en volumen y superficie.
2. Una esfera homogénea de radio  $b$  tiene permitividad  $\varepsilon$  y es concéntrica con una cáscara esférica con densidad de carga  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  y radio  $a$ . El conjunto se halla sumergido en un campo eléctrico uniforme al infinito  $\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$ .
  - a) Calcular el potencial en todo punto del espacio.
  - b) Hallar la distribución de cargas inducidas en  $r = b$ .
3.
  - a) En un medio de constante dieléctrica  $\varepsilon$  se sumerge una esfera conductora de radio  $a$  cargada con una carga total  $Q$ . Hallar los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en todo punto del espacio y las distribuciones de carga libre en el conductor y de polarización en el dieléctrico.
  - b) La misma esfera conductora del caso anterior se conecta ahora a un potencial  $V$ . Resolver lo mismo del caso anterior. Si bien existe una analogía formal entre ambos casos, se manifiesta una diferencia esencial entre ellos: la dependencia de los campos con  $\varepsilon$ . Explicar las causas de esta diferencia.
4. Una esfera conductora de radio  $a$  está a potencial cero. Entre  $r = a$  y  $r = b$  hay un dieléctrico de permitividad  $\varepsilon$ , y ubicada a una distancia  $r'$  del origen hay una carga  $q$ . Considerar separadamente los dos casos  $a < b < r'$  y  $a < r' < b$ .
  - a) Identificar dónde se encuentran las cargas y hallar el potencial electrostático en todo punto del espacio.
  - b) Hallar las densidades de carga de polarización en volumen y superficie, y las densidades de carga libre en todo el espacio.
  - c) Analizar los casos  $\varepsilon = 1$  y  $\varepsilon \rightarrow \infty$ .

**Sugerencia:** usando la forma genérica del potencial de una cáscara cargada frente a una esfera (que puede deducirse en una línea), bastará plantear una sola ecuación con una sola incógnita. En otro caso tendrá que plantear 5 ecuaciones con 5 incógnitas.

5. Un medio dieléctrico de permitividad  $\varepsilon$  ocupa el semiespacio con  $z < 0$ . A una altura  $d > 0$  sobre el dieléctrico hay una carga  $q$ .

- a) Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio usando separación de variables en coordenadas cartesianas.
  - b) Para cada una de las expresiones obtenidas en (a), identifique la contribución al potencial asociada exclusivamente a la carga  $q$ . Es decir, escriba  $\phi = \phi_q + \phi_r$ , donde  $\phi_q$  es el potencial de la carga original. ¿A qué simple distribución de cargas puntuales puede atribuirse, en cada región, la parte restante del potencial,  $\phi_r$ ?
  - c) ¿A qué se reduce la solución cuando  $\varepsilon \rightarrow \infty$ ? ¿Cuál es la interpretación física de este resultado?
  - d) Generalice los resultados anteriores al caso en que el semiespacio superior está ocupado por un medio con permitividad  $\varepsilon_1$  y el inferior por un medio con permitividad  $\varepsilon_2$ . En términos de las permitividades, ¿cuál es la magnitud que caracteriza al problema?
  - e) Encuentre la función de Green para todo el espacio según las condiciones del ítem anterior. (Notar que la carga puede estar en cualquier posición, por encima y por debajo del plano  $z = 0$ .)
6. Hallar el potencial electrostático en todo el espacio producido por un disco de radio  $a$  con densidad superficial uniforme  $\sigma$ , ubicado dentro de una esfera dieléctrica del mismo radio y permitividad  $\varepsilon$ .

**Medios magnéticos.**

7. Una esfera de radio  $a$  está uniformemente magnetizada con densidad  $\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$ .
- a) Calcular el momento dipolar de la esfera: (1) integrando directamente la densidad de magnetización, (2) calculando el momento dipolar de las cargas magnéticas, (3) calculando el momento dipolar magnético de las corrientes de magnetización.
  - b) Calcular los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  usando la integral de Poisson para el potencial escalar magnético. Identificar el problema eléctrico equivalente. Comparar el potencial en el exterior de la esfera con el que produciría un dipolo puntual igual al momento dipolar total de la esfera. Observe que esto da un cuarto método para calcular el momento dipolar, una vez conocidos los campos en el exterior de la esfera.
  - c) Calcular el potencial vectorial a partir de la corriente total.
  - d) En éste y los siguientes ítems la misma esfera magnetizada está situada en un medio lineal, isótropo y homogéneo de permeabilidad  $\mu$ . Discutir por qué los métodos utilizados en (b) y (c) no sirven para hallar  $\mathbf{B}$  en este caso. Utilizar entonces el método de separación de variables. Verificar que si para  $\mu = 1$  se recupera el resultado anterior.

- e) Hallar el momento dipolar total  $\mathbf{m}$  inducido en el medio exterior. De los métodos enunciados en el punto (a), ¿cuáles son válidos en este caso?
- f) Suponga ahora que el medio de permeabilidad  $\mu$  se extiende únicamente hasta un radio  $b > a$ , concéntrico con la esfera. Calcule los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en todo el espacio y encuentre el momento magnético total  $\mathbf{m}$  inducido en el medio. Verifique que para  $\mu = 1$  se obtienen los resultados de (a-c). Estudie el límite en que  $b \rightarrow \infty$  y compare con los resultados para  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{m}$  de los puntos (d) y (e). ¿Qué sucede con  $\mathbf{m}$ ?
- g) Comparando las fuentes del campo en cada caso, probar que una esfera hueca cargada con densidad superficial  $\sigma$  y que rota con velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega} = \omega_0 \hat{z}$  constituye un problema equivalente al de la esfera con magnetización uniforme. A partir de los resultados de los puntos anteriores, por simple identificación, deducir el momento magnético de la esfera rotante y los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en todo el espacio.
8. Un cilindro de radio  $a$  y longitud  $L$  está orientado según la dirección  $\hat{z}$ , con sus tapas en  $z = \pm L/2$ , y está caracterizado por una densidad de magnetización uniforme  $\mathbf{M} = M \hat{z}$ .
- a) Calcular los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  a partir de un potencial escalar magnético  $\phi_H$ , continuo en todo el espacio y tal que  $-\nabla\phi_H = \mathbf{H}$ . Escribir  $\phi_H$  como un desarrollo en las funciones de Bessel  $J_\nu(kr)$  o como una integral de Fourier en  $z$ .
- b) ¿A qué distribución de corriente es equivalente este imán?
- c) A partir del campo del imán, calcular el campo  $\mathbf{B}$  producido por un solenoide cilíndrico, de radio  $a$  y longitud  $L$ , por el que circula una corriente  $I$  y que tiene  $n$  espiras por unidad de longitud.
- d) Calcular explícitamente los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  del imán cuando  $L \rightarrow \infty$ .
9. Una esfera de radio  $a$ , magnetizable con permeabilidad  $\mu$ , está centrada con una espira de radio  $b > a$  por donde circula una corriente  $I$ .
- a) Indicar todas las fuentes de cada uno de los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ .
- b) ¿Por qué no es cierto que  $\mathbf{H} = -\nabla\phi_H$ ? (con  $\phi_H$  el potencial escalar magnético continuo en todo el espacio).
- c) Calcular el campo magnético en todo el espacio en términos del campo  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_d$  con fuentes en su rotor y fuentes en su divergencia.
10. Por un cable rectilíneo de radio  $a$  circula una corriente  $I$ . Concéntrico con el cable hay un cilindro de hierro dulce ( $\mu = 1000$ ) de radio interior  $b$  y exterior  $c$ . Dentro y fuera del cilindro hay vacío. La permeabilidad del cable vale 1.

- a) Calcular y graficar  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{M}$  en todo punto del espacio.
  - b) ¿Es efectivo el cilindro de hierro dulce para apantallar el campo magnético en la zona  $r > a$ ?
  - c) Encontrar la densidad de corriente de magnetización en volumen y en superficie y las cargas de magnetización.
  - d) Explicar la relación entre cada campo y sus fuentes.
11. Un imán está limitado por los planos  $z = 0$  y  $z = d$ . En las direcciones  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  se extiende entre  $-\infty$  y  $+\infty$ . La densidad de magnetización dentro del imán está dada por

$$\mathbf{M} = m_0 (\sin qx \hat{x} + \cos qx \hat{z}) \quad (1)$$

con  $q > 0$ . Es decir, según un corte en el plano  $xz$ , la magnetización va rotando. Puesto que la magnetización es permanente y conocida en todo el espacio, el paso a un problema electrostático equivalente es el camino más sencillo. Pero como  $\mathbf{M}$  no es uniforme, puede haber cargas superficiales y de volumen,

$$\sigma = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \cdot \hat{n} \quad , \quad \rho = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (2)$$

- a) Calcular el potencial escalar para el campo  $\mathbf{H}$  y el campo magnético en todo el espacio, pero especialmente en las regiones por encima y por debajo del imán. (**sugerencia:** integrar la función de Green para cada contribución).
- b) La solución es una expresión cerrada que no incluye sumatorias ni integrales. Cuando la obtenga, analice *a posteriori* qué tipo de cosas podrían haber deducido *a priori*.

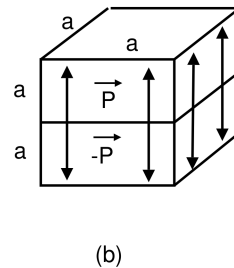
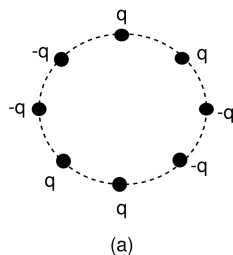
#### Momentos multipolares.

12. a) Probar que, salvo el monopolar, todos los momentos multipolares de una distribución de carga con simetría esférica son nulos.
- b) Probar que el momento dipolar de una distribución de carga neutra no depende del origen. En general, probar que el primer momento multipolar no nulo es independiente del origen.
- c) Dado el desarrollo multipolar de dos distribuciones de carga  $\rho_1(r)$  y  $\rho_2(r)$ , ¿cómo es el desarrollo multipolar de la distribución total  $\rho_1 + \rho_2$  ¿Y si son tres? Generalizar.
13. Analizar los momentos multipolares, hasta el cuadrupolar, de las siguientes distribuciones de carga, y en el caso de tener momento cuadrupolar determinar sus ejes principales:

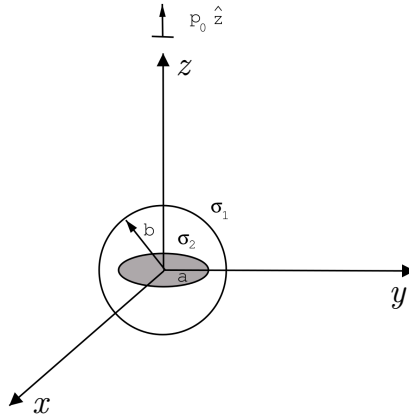
- a) Un disco cargado con una distribución cilíndricamente simétrica respecto de su eje.
- b) Un cubo uniformemente cargado en volumen. Estimar el error si a un cubo de 10 cm de lado se lo considera como una carga puntual a distancias del orden de 1 m de su centro.
- c) Dos distribuciones lineales formadas por una sucesión equiespaciada, a distancia  $s$ , de cargas puntuales: la primera consta de tres cargas en el siguiente orden  $q, -2q, q$  y la segunda consta de cuatro cargas  $-q, 3q, -3q, q$ .
- d) Una distribución plana formada por cuatro cargas: dos de valor  $q$  y dos de valor  $-q$ , situadas alternativamente en los vértices de un cuadrado de lado  $s$ . Analizar el límite  $s \rightarrow 0, q s^2 \rightarrow \text{cte}$ .

14. Calcule los momentos multipolares hasta el cuadrupolar inclusive de las siguientes configuraciones:

- a) Cargas puntuales distribuídas sobre un círculo como muestra la figura (a).
- b) Dos cubos con polarización uniforme unidos como muestra la figura (b).



15. Una cáscara esférica de radio  $b$  posee una distribución de carga  $\sigma_1 = \sigma_0 \cos \theta$ . En el interior de la cáscara, perpendicular al eje  $z$  correspondiente al sistema dibujado en la figura y centrado en el mismo, se encuentra un disco de radio  $a$  cuya distribución de carga es  $\sigma_2 = \sigma_0[(r/a) - c]$ . Sobre el eje  $z$ , a una distancia  $d$  del origen, hay un dipolo puntual de intensidad  $\mathbf{p} = p_0 \hat{z}$ . Encontrar los valores de  $c$  y  $p_0$  para que el primer momento multipolar no nulo de la distribución sea el cuadrupolar y calcular, en ese caso el potencial para puntos lejanos.



16. Calcular el potencial y el campo creados por un disco de radio  $a$  con una densidad superficial de momento dipolar  $\mathbf{P}$  perpendicular al disco. Hacer el cálculo para los puntos situados sobre el eje del mismo. Obtener expresiones límites para puntos muy cercanos y muy lejanos. Graficar e interpretar los resultados.
17. La distribución de carga  $\rho(\mathbf{r})$  de un núcleo atómico está concentrada en dimensiones del orden de  $10^{-13}\text{cm}$ . El potencial se aproxima en general por  $\phi = Ze/r$ , lo que equivale a suponer que  $\rho(\mathbf{r})$  tiene simetría esférica. No hay evidencia de que ningún núcleo tenga momento dipolar. Sin embargo, sí existe evidencia de que muchos tienen momento cuadrupolar  $Q$  distinto de cero.
- Para simplificar, considere  $\rho(\mathbf{r})$  uniforme en un elipsoide de revolución de semi-ejes  $a$  y  $b$ . Calcule  $Q$  respecto de ejes apropiados. La carga total es  $q = Ze$ .
  - ¿Qué característica cualitativa del elipsoide revela el signo de  $Q_{zz}$ ?
  - Números: para  $Z = 63$ ,  $Q_{zz}/e = 2,5 \times 10^{-24}\text{cm}^2$ . Suponiendo que el radio medio es  $R = (a + b)/2 = 7 \times 10^{-13}\text{cm}$ , determinar la diferencia  $(a - b)/R$ .
  - Un núcleo de los descritos en (a) está en el origen, su eje de simetría alineado con el eje  $z$ . Hay un campo eléctrico externo con simetría cilíndrica y con una variación espacial caracterizada por  $\partial E_z/\partial z \neq 0$ . Muestre que la energía de interacción entre el cuadrupolo y el campo es

$$W = -\frac{Q_{zz}}{4} \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_0$$

## Preguntas conceptuales.

1. ¿Cuál es el cuadrupolo de un dipolo ideal? ¿Cuál es el dipolo de una carga puntual? ¿Y el cuadrupolo? ¿De qué dependen las respuestas a las preguntas anteriores?
2. Al resolver un problema interno usando el método de imágenes. ¿Cuál es la contribución de las cargas imágenes a los momentos multipolares?
3. ¿Cuáles son los momentos multipolares no nulos de las siguientes distribuciones?
  - a) Cilindro infinito cargado con una densidad arbitraria.
  - b) Un dipolo en la dirección  $z$  rodeado por una cáscara esférica conductora conectada a tierra no concéntrica con él.
4. En el caso de un cuerpo con densidad de magnetización permanente  $\mathbf{M}$ ,

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}.$$

Como  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , tenemos que:

$$\mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu} \mathbf{B}$$

o sea que  $\mathbf{M}$ , que es constante, es proporcional a  $\mathbf{B}$ , que en principio puede ser arbitrario (¿o no?), y siempre con la misma constante de proporcionalidad. ¿Cuál es el error en ese razonamiento?

5. Encontrar el campo  $\mathbf{B}$  de un toro de sección circular con una magnetización uniforme de la forma  $\mathbf{M} = M_0\hat{\phi}$ . ¿Cómo cambian los resultados si el toro está sumergido en un medio de permeabilidad  $\mu$ ? ¿Y si el toro no tiene sección circular?