Separación de variables

Cilíndricas

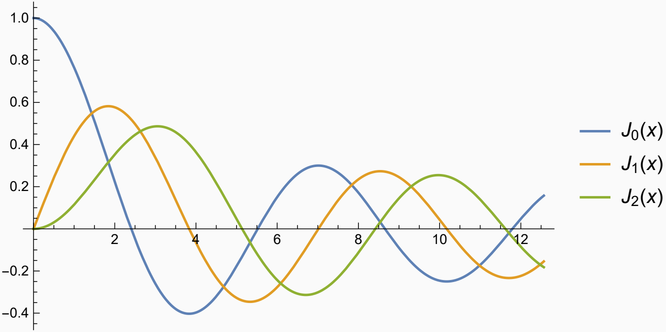
Clase práctica 17/04/2024

Física Teórica I

Función de Bessel de 1º especie

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$$



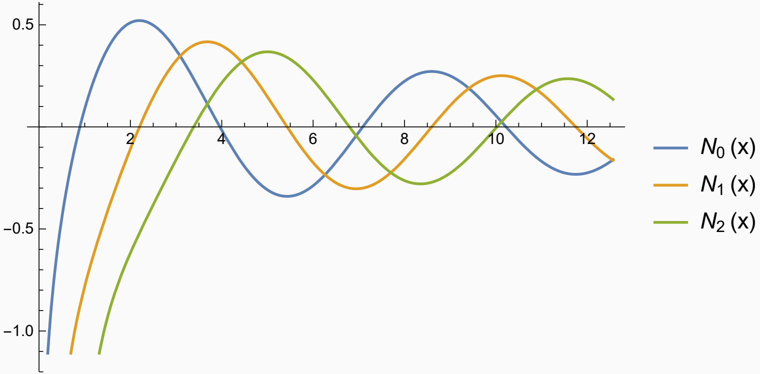
$$J_0(0) = 1$$

$$x \gg 1,\ \nu: \quad J_\nu(x) \sim \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$$

$$J_{\nu\neq 0}(0) = 0$$

Función de Bessel de 2º especie

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

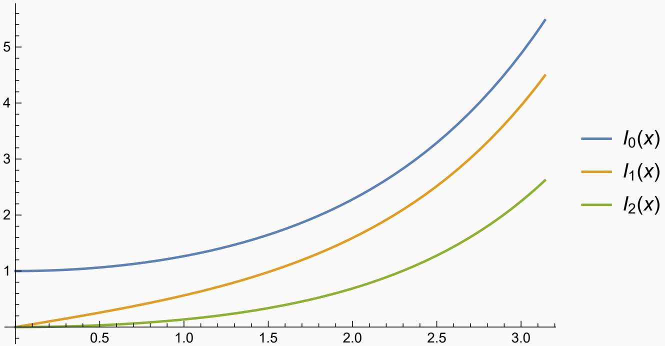


$$N_\nu(x \to 0) \to -\infty$$

$$x \gg 1,\ \nu : \quad N_\nu(x) \sim \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

Función de Bessel modificada de 1º especie

$I_\nu(x) = (i)^{-\nu} J_\nu(ix) \ \in \mathbb{R}$



$I_0(0) = 1$

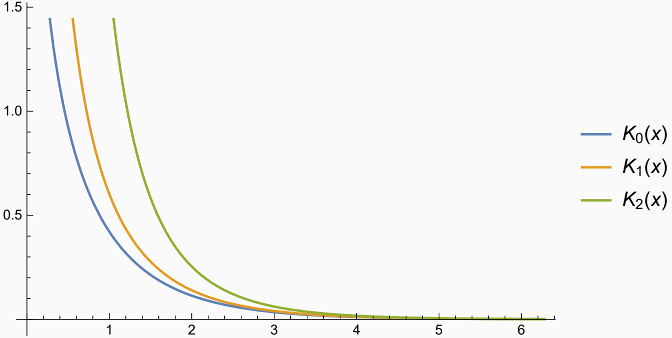
$x \gg 1, \ \nu : \quad I_\nu(x) \sim \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$

$I_{\nu \neq 0}(0) = 0$

Función de Bessel modificada de 2º especie

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}(i)^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix) \;\; \in \mathbb{R}$$

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$$



$$K_\nu(x \to 0) \to \infty$$

$$x \gg 1, \, \nu : \quad K_\nu(x) \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

Guía 2 - Ejercicio 14.a

14. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de un cilindro circular de radio a y longitud L, separando en regiones de las siguientes maneras:

    a) Cortando con un plano perpendicular al eje del cilindro.

    b) Cortando con un cilindro coaxial al cilindro original.

Relaciones de ortogonalidad

Caso discreto: $\int_0^a \rho\, J_\nu(x_{\nu n}\rho/a)\, J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a)\, d\rho = \frac{a^2}{2}\left[J_{|\nu|+1}(x_{\nu n})\right]^2 \delta_{nn'}$

Caso continuo: $\int_0^\infty \rho\, J_\nu(k\rho)\, J_\nu(k'\rho)\, d\rho = \frac{1}{k}\delta(k-k')$

Trigonométricas:

$$\int_0^{2\pi} \cos(\nu\varphi)\cos(\nu'\varphi)\, d\varphi = \pi\,(\delta_{\nu\nu'} + \delta_{\nu 0}) = \begin{cases} 2\pi & \text{si } \nu' = \nu = 0 \\ \pi\,\delta_{\nu\nu'} & \text{si } \nu', \nu \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\nu\varphi)\sin(\nu'\varphi)\, d\varphi = \pi\delta_{\nu\nu'}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\nu\varphi)\sin(\nu'\varphi)\, d\varphi = 0$$

Guía 2 - Ejercicio 14.b

14. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de un cilindro circular de radio a y longitud L, separando en regiones de las siguientes maneras:

    a) Cortando con un plano perpendicular al eje del cilindro.

    b) Cortando con un cilindro coaxial al cilindro original.

Wronskiano

$$W[K_\nu, I_\nu](x) = K_\nu(x)I'_\nu(x) - K'_\nu(x)I_\nu(x) = \frac{1}{x}$$

Más propiedades

$$\int x^{\nu} J_{\nu-1}(x) = x^{\nu} J_{\nu}(x), \quad \nu \in \mathbb{N}$$

Relaciones de recurrencia (que valen también para $N_{\nu}(x)$):

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x)$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2 J'_{\nu}(x)$$