Separación de variables

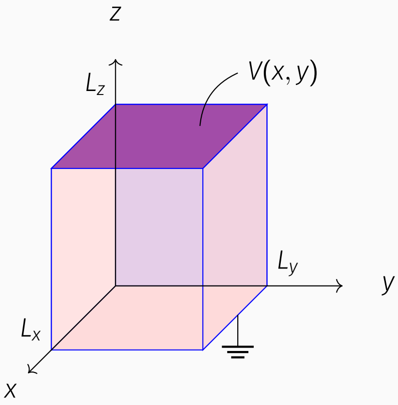
Cartesianas - Recintos acotados

Clase práctica 8/04/2024

Física Teórica I

Ejemplo 1

Hallar el potencial $\Phi(x, y, z)$ en la región interior de la siguiente configuración:



$$\nabla^2\Phi = 0$$

Condiciones de contorno:

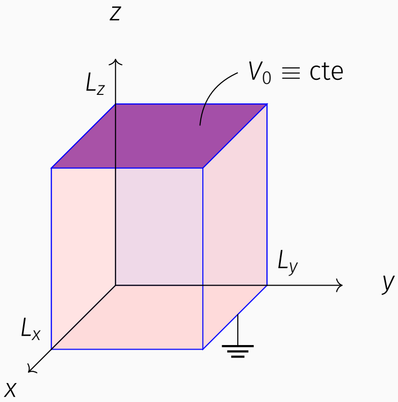
$$\Phi|_{x=0} = 0$$
$$\Phi|_{x=L_x} = 0$$
$$\Phi|_{y=0} = 0$$
$$\Phi|_{y=L_y} = 0$$
$$\Phi|_{z=0} = 0$$
$$\Phi|_{z=L_z} = V(x, y)$$

Relación de ortogonalidad

$$\int_0^L dx \sin\left(k_n x\right) \sin\left(k_{n'} x\right) = \frac{L}{2}\delta_{nn'} = \begin{cases} \frac{L}{2} & \text{si } n' = n \\ 0 & \text{si } n' \neq n \end{cases}$$

Ejemplo 1 - Caso particular

Hallar el potencial $\Phi(x, y, z)$ en la <u>región interior</u> de la siguiente configuración:



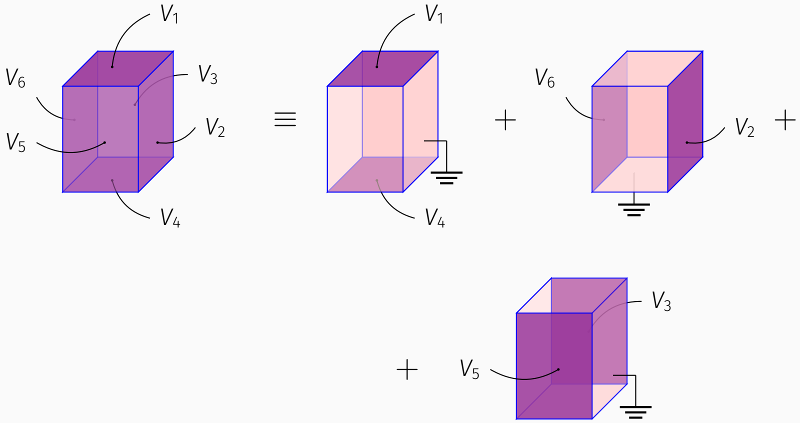
$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Condiciones de contorno:

$$\Phi|_{x=0} = 0$$
$$\Phi|_{x=L_x} = 0$$
$$\Phi|_{y=0} = 0$$
$$\Phi|_{y=L_y} = 0$$
$$\Phi|_{z=0} = 0$$
$$\Phi|_{z=L_z} = V_0$$

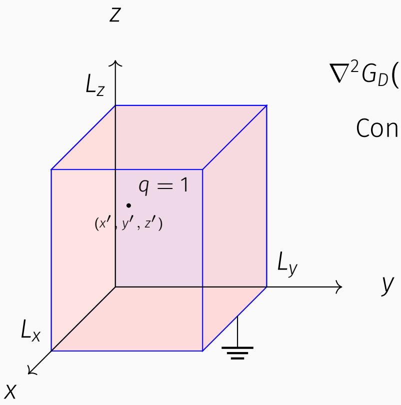
Ejemplo 1 generalizado

Hallar el potencial $\Phi(x, y, z)$ en la región interior de la siguiente configuración:



Ejemplo 2

Hallar la función de Green de Dirichlet $G_D(\vec{r},\vec{r}')$ en la región interior de un prisma rectangular de lados L_x, L_y y L_z.



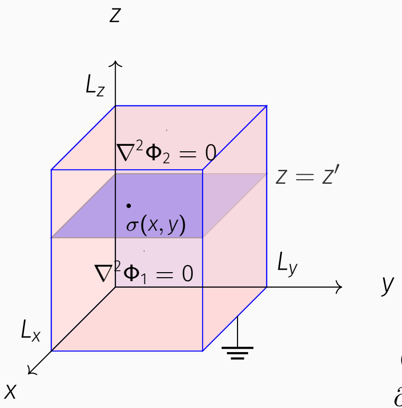
$$\nabla^2 G_D(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

Condiciones de contorno de Dirichlet:

$$G_D|_{x=0} = 0$$
$$G_D|_{x=L_x} = 0$$
$$G_D|_{y=0} = 0$$
$$G_D|_{y=L_y} = 0$$
$$G_D|_{z=0} = 0$$
$$G_D|_{z=L_z} = 0$$

Ejemplo 2

Hallar la función de Green de Dirichlet $G(\vec{r}, \vec{r}')$ en la **región interior** de un prisma rectangular de lados L_x, L_y y L_z.



Condiciones de contorno:

$$\Phi_1|_{x=0} = \Phi_2|_{x=0} = 0$$

$$\Phi_1|_{x=L_x} = \Phi_2|_{x=L_x} = 0$$

$$\Phi_1|_{y=0} = \Phi_2|_{y=0} = 0$$

$$\Phi_1|_{y=L_y} = \Phi_2|_{y=L_y} = 0$$

$$\Phi_1|_{z=0} = \Phi_2|_{z=L_z} = 0$$

Continuidad del potencial:

$$\Phi_1|_{z=z'} = \Phi_2|_{z=z'}$$

Condición de salto del campo:

$$\partial_z\Phi_1|_{z=z'} - \partial_z\Phi_2|_{z=z'} = 4\pi\sigma(x, y)$$

Propiedad de las funciones hiperbólicas

$$\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \sinh(b)\cosh(a)$$

6. Un cubo de lado a está conectado a tierra. En su interior hay un cuadrado con densidad superficial uniforme σ y una carga puntual q. Calcule el potencial en *todo el espacio*.