En clase vimos que debemos dejar de lado la forma Galileana en la que entendemos que se relacionan los sistemas de referencia, y con ello introducir *las transformaciones de Lorentz*. Para esto debemos considerar al tiempo como una coordenadas más, en pie de igualdad que la posición. Esto lo hacemos definiendo un punto del espaciotiempo como $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$: un *evento*. La formulación más sencilla consiste en un sistema de referencia $\mathcal{S}'$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\hat{x}$ respecto a otro sistema de referencia $\mathcal{S}$. En $\mathcal{S}'$ las coordenadas del espaciotiempo x'^μ se describen en términos de las coordenadas x^μ, vistas desde el sistema $\mathcal{S}$, como

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{1}$$

con $\beta = \frac{v}{c}$ y $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$. Este cambio de coordenadas se denomina un *boost*[1]. Los boosts junto a las rotaciones y reflexiones son las transformaciones que mantiene invariante la velocidad de la luz. El conjunto de estas transformaciones es lo que se conoce como el *grupo de Lorentz*.

Sabemos que las rotaciones y reflexiones combinan las coordenadas espaciales mediante una matriz ortogonal[2]. Lo novedoso del incorporar los boosts es que estas involucran una combinación con el tiempo. Podemos aplicar ambas transformaciones para obtener la forma general de un boost para una velocidad arbitraria $\mathbf{v}$. Dejando de lado las cuentas, la idea de cómo hacerlo es sencilla: podemos aplicar una rotación $\mathbf{O}$ que mande $\mathbf{v}$ a $v\hat{x}$, luego aplicar el boost (1), y por último volver a la dirección original con $\mathbf{O}^{-1}$. Este conjunto de transformaciones resulta en

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma\left(ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r}\right) \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \gamma\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\beta}) - ct\right)\boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

A simple vista estas ecuaciones parecen más abstrusas que las planteadas en (1) pero es fácil mostrar que se recupera lo mismo viendo en la dirección del movimiento. Para esto debemos usar que $\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^2 = (\gamma-1)$. Proyectando $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ en la dirección del movimiento $\hat{\beta}$ es

$$\mathbf{r}'\cdot\hat{\beta} = \mathbf{r}\cdot\hat{\beta} + (\gamma-1)\mathbf{r}\cdot\hat{\beta} - \gamma\beta ct = \gamma(\mathbf{r}\cdot\hat{\beta} - \beta ct).$$

[1] En la dirección $\hat{x}$.

[2] Transformaciones lineales $\mathbf{O}$ tales que $\mathbf{O}^t\mathbb{I}\mathbf{O} = \mathbb{I}$.

Si tomamos la componente paralela a la dirección del movimiento $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r} \cdot \beta)\hat{\beta}$ y la componente ortogonal $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}$, es $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ y por lo tanto aquello que describimos como un boost general corresponde al cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}'_{\parallel} &= \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \boldsymbol{\beta} ct) \\ \mathbf{r}'_{\perp} &= \mathbf{r}_{\perp}. \end{aligned}$$

Esta nueva concepción de cómo transforman las coordenadas del espaciotiempo implicará una transformación distinta de los campos observables, e.g. el campo de velocidades; las ecuaciones de Newton; y los que nos interesan más en la materia, los campos eléctricos y magnéticos. Por lo mismo es importante saber qué cantidades resultan invariantes ante estas transformaciones. Por su formulación, buscamos que estas preserven $|\frac{d\mathbf{r}}{dt}| = c = |\frac{d\mathbf{r}'}{dt'}|$. Los boosts tienen de manera intrínseca la preservación de la forma cuadrática llamada el *intervalo* dado por

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

El intervalo se puede reescribir, usando notación de índice, como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

definiendo la *métrica* $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Si suponemos que el cambio de coordenadas está dada por una transformación lineal $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ entonces el intervalo resulta un invariante si se satisface

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta \tag{2}$$

De manera más general decimos que el grupo de Lorentz son aquellas transformaciones que cumplen la condición (2). Nuevamente, las rotaciones y reflexiones de campos vectoriales son un tema que ya vimos con un poco más de detalle al principio de la materia; lo interesante es ver qué ocurre con ellos cuando apliquemos un boost. Por ejemplo, sabemos que si las coordenadas espaciales rotan mediante una matriz $\mathbf{R}$ entonces la densidad de corriente $\mathbf{J}$ transforma como $\mathbf{RJ}$. Así es cómo definimos cualquier cosa que llamamos como *vector*, aquello que transforma como el cambio de coordenadas. De manera análoga, teniendo ahora una forma general de transformar las coordenadas del espaciotiempo, definiemos como *cuadrivector (contravariante)* V^μ aquella cantidad que en el nuevo sistema de referencia resulta ser

$V'^{\mu} = \Lambda^{\nu}{}_{\beta} V^{\nu}$. Y usando la métrica resulta conveniente definir el cuadrivector *covariante* como $V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu$. Si el cuadrivector es $V^\mu = (V^0, \mathbf{V})$, entonces $V_\mu = (-V^0, \mathbf{V})$.

Con esta nueva notación podemos reescribir el intervalo como $ds^2 = dx_\mu dx^\mu$. Pero esta definición no está hecha solo para simplificar una expresión sino que resulta de un formalismo, en el cual no entraremos en detalle, que permitirá describir teorías fundamentales de manera covariante; es decir que se expresen de manera idéntica en cualquier sistema de referencia.

Volviendo al ejemplo de la corriente $\mathbf{J}$; si este es en efecto un vector resulta natural concebirlo como la componente espacial de un cuadrivector contravariante $J^\mu = (\cdots, \mathbf{J})$. La cuestión es ver qué va en la componente temporal. Una buena pista de cuál es surge de la conservación de la carga. Sabemos que $\mathbf{J}$ y la densidad de carga ρ deben cumplir

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial c\rho}{\partial ct} + \partial_i J^i = \partial_0 (c\rho) + \partial_i J^i.$$

Por un lado resulta natural pedir que la conservación de la carga sea invariante ante cambios de coordenadas. No se ha observado y no tiene sentido que por el movimiento en una dada dirección se introduzca carga neta. Por otro lado, si definimos[3] $J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$, lado la propia conservación de la carga resulta covariante expresándose como $\partial_\mu J^\mu = 0$.

Siguiendo con la misma idea, el potencial vector $\mathbf{A}$ lo podemos pensar como la parte espacial de un cuadrivector A^μ. Y así como $\mathbf{J}$ genera $\mathbf{A}$, resultaría natural pedir que J^0 genere A^0, es decir que el *cuadripotencial* debería ser $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ con ϕ el potencial escalar eléctrico.

La formulación covariante del electromagnetismo se construye a partir del cuadripotencial covariante $A_\mu = (-\phi, \mathbf{A})$. Buscamos escribir alguna cantidad que contenga a los campos eléctrico y magnético, use derivadas de A_μ y además sea en sí mismo covariante. Un buen punto de partida es el campo eléctrico. Sabemos que $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A}$. Entonces podemos hacer la siguiente reescritura:

$$\mathbf{E}_i = -\partial_i \phi - \frac{1}{c}\partial_t A_i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i$$

Esto sugiere definir el tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Está claro que al ser antisimétrico en su forma matricial, de 4×4, solo seis coeficientes son no nulos y en principio independientes. Ya vimos que las tres componente del

[3] También se podría definir como $J^\mu = (\rho, \frac{1}{c}\mathbf{J})$. Obviamente esto implicaría un reescalamiento por $\frac{1}{c}$ en cualquier predicción hecha con la definición que tomamos nosotros.

campo eléctrico aparecen como $F_{i0} = -F_{0i} = (\mathbf{E})_i$. Veamos que el campo magnético surge de F_{ij}. En efecto:

$$\begin{aligned}
F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_l A_m \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_l A_m \\
F_{ij} &= \epsilon_{ijk}(\mathbf{B})_k.
\end{aligned}$$

Entonces podemos escribir el tensor en su forma matricial

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Así como la definición de un cuadrivector (con los índices arriba) es que sus coeficientes transformen como las coordenadas; un tensor $T^{\mu\nu}$, en este caso de orden dos, es tal si $T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}T^{\alpha\beta}$. Entonces para ver cómo transforman los campos necesitamos subir los índices al tensor $F_{\mu\nu}$ y esto lo hacemos mediante la métrica calculando $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$. Es instructivo y útil para más adelante ver cómo suben los índices uno a la vez. Empecemos calculando $F^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}$.

$$F^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Si en su lugar hubiéramos subido el otro índice, obtendríamos $F_{\mu}{}^{\nu} = \eta^{\mu\alpha}F_{\mu\alpha}$ como

$$F_{\mu}{}^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, el tensor que estamos buscando es

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que sabemos cómo transforma este tensor estamos interesado en ver cómo son los campos $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{B}'$ vistos desde un sistema de referencia $\mathcal{S}'$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto a un sistema de referencia $\mathcal{S}$ donde se observan los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Estos surgen de la transformación

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}F^{\alpha\beta}.$$

De hacer esta cuenta surgen las transformaciones de campos

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta},$$
$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}.$$

Al igual que antes es conveniente ver los campos en la dirección paralela al movimiento, $\mathbf{E}_{\parallel} = (\mathbf{E}\cdot\hat{\beta})\hat{\beta}$ y $\mathbf{B}_{\parallel} = (\mathbf{B}\cdot\hat{\beta})\hat{\beta}$, y perpendicular a este $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\parallel}$ y $\mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_{\parallel}$. La transformación de estos campos resulta en

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}\\
\mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}\\
\mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}_{\perp})\\
\mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}_{\perp})
\end{aligned} \tag{3}$$

Un ejemplo fundamental es el campo electromagnético que genera una carga moviéndose con velocidad uniforme $\mathbf{v} = v\hat{x}$. Sabemos que una carga q en reposo en el origen tiene potencial vector $\mathbf{A}' = 0$ y su potencial escalar es $\phi'(\mathbf{r}') = \frac{q}{|\mathbf{r}'|}$, entonces es

$$A'^{\mu} = (\phi'(\mathbf{r}'), \mathbf{0}).$$

Si la carga se está moviendo con velocidad $v\hat{x}$, entonces las coordenadas $\mathbf{r}'$ se escriben como en (1) respecto a las coordenadas $\mathbf{r}$. Y como el sistema donde la carga se mueve tiene velocidad $-\mathbf{v}$ respecto al sistema donde la carga está en reposo, el cuadripotencial cambia como

$$A^{\mu} = (\gamma\phi'(\mathbf{r}'(\mathbf{t},\mathbf{r})), \gamma\beta\phi'(\mathbf{r}'(\mathbf{t},\mathbf{r}))\hat{x})$$

En conclusión, un observador que ve una carga moviéndose con velocidad $v\hat{x}$ mide los campos

$$\phi(t,\mathbf{r}) = \frac{\gamma q}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2}}$$
$$\mathbf{A}(t,\mathbf{r}) = \frac{\gamma\beta q}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2}}\hat{x}.$$

Calculemos los campos eléctrico y magnético que generan estos potenciales. En primer lugar, el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

Cada derivada por separado da

$$-\nabla \phi(t, \mathbf{r}) = \frac{\gamma q}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(\gamma^2(x - vt)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}\right)$$
$$-\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\gamma q}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \gamma^2(x - vt)\beta^2\hat{x}$$

Sumando estas expresiones el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{\gamma q}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}((x - vt)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}).$$

Es fácil mostrar, usando que $\mathbf{A} = \beta\phi\hat{x}$, que el campo magnético es

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$$

(11) Dos partículas cargadas se mueven con velocidad constante en direcciones ortogonales. Calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre la otra en el instante en que una de las partículas cruza la dirección de movimiento de la otra. Verificar que las fuerzas no son iguales y opuestas. Por lo tanto, no se conserva el impulso de las partículas ¿Hay en ello alguna contradicción?

Empecemos planteando los sistemas de referencia. Sabemos que ambas trayectorias son rectas ortogonales en el plano, digamos xy. Entonces es conveniente poner el origen en el punto en que se cruzan. Tomemos el caso general en que cada una tiene, en reposo, carga q_1 y q_2.

En relación a las trayectorias de este sistema se pueden dar varias situaciones dependiendo, por ejemplo, de qué partícula tiene mayor velocidad, cuál cruza primero la trayectoria de la otra, y demás cuestiones puramente cinemáticas. En cualquier caso, el resultado que obtengamos será análogo dependiendo de parámetros que determinen las distintas situaciones.

En lo que sigue consideraremos lo siguiente: q_1 y q_2 viajan con velocidades constantes $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ como muestra la figura. Dado que queremos estudiar el momento en que una cruza la trayectoria de la otra, el origen según el sistema de referencia que elegimos, necesitamos determinar algún punto del que partieron. Diremos que q_1 estaba en $x_0 = -v_1 t_1$ siendo x_0 la posición en

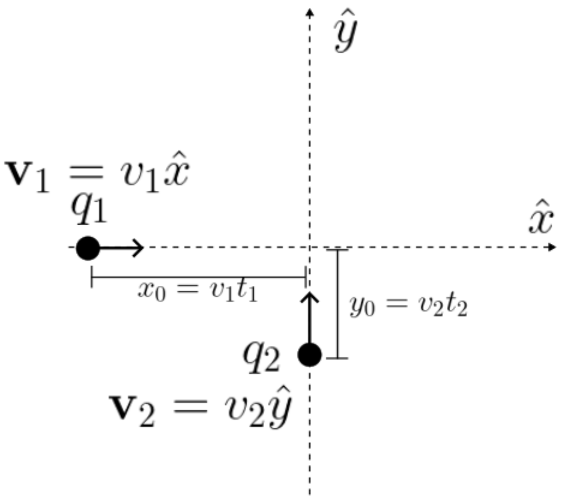

Figura 1: Esquema del sistema.

la que se encontraba en el momento en que empezamos a seguir la trayectoria y t_1 el tiempo que le tomaría llegar al origen desde x_0 con velocidad v_1. Con la misma idea diremos que q_2 inicialmente estaba en $y_0 = -v_2 t_2$.

Supondremos además que q_2 cruza primero la trayectoria de q_1; es decir que $t_2 < t_1$. Cualquier otra variación de este movimiento dará un resultado análogo a lo que obtendremos a continuación.

Por un lado, sabemos que los campos eléctricos de cada carga en movimiento uniforme vista desde el sistema fijo al origen son

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \gamma_1 q_1 \frac{(x - x_0 - v_1 t)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{(\gamma_1^2 (x - x_0 - v_1 t)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
\mathbf{E}_2 &= \gamma_2 q_2 \frac{x\hat{x} + (y - y_0 - v_2 t)\hat{y} + z\hat{z}}{(x^2 + \gamma_2^2 (y - y_0 - v_2 t)^2 + z^2)^{3/2}};
\end{aligned}$$

y los campos magnéticos $\mathbf{B}_1 = \boldsymbol{\beta}_1 \times \mathbf{E}_1$ y $\mathbf{B}_2 = \boldsymbol{\beta}_2 \times \mathbf{E}_2$.

Queremos ver las fuerzas que se hacen ambas cargas en el momento en que q_2 está en el origen. La primer pregunta es entonces ¿dónde está ubicada q_1 en t_2? Dado que el movimiento es lineal con velocidad constante la respuesta es simplemente

$$x = x_0 + v_1 t_2 = -v_1(t_1 - t_2) = -v_1 \Delta t,$$

donde dejamos explícito que q_2 se encuentra aún en las x negativas y que $\Delta t = t_1 - t_2$ es positivo. Entonces la fuerza que siente q_2 debida a q_1 es

$$\mathbf{F}_{21} = q_2 \left[\mathbf{E}_1(t_2, \mathbf{0}) + \mathbf{B}_1(t_2, \mathbf{0})\right]$$

Podemos calcular explícitamente cada campo como

$$\mathbf{E}_1(t_2, \mathbf{0}) = \frac{q_1}{\gamma_1^2 (v_1(t_1 - t_2))^2}\hat{x} = \frac{q_1}{\gamma_1^2 v_1^2 \Delta t^2}\hat{x} \to \mathbf{B}_1(t_1, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Entonces la fuerza que q_1 ejerce sobre q_2 es

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{\gamma_1^2 v_1^2 \Delta t^2}\hat{x}.$$

Por otro lado, para obtener la fuerza que hace q_2 sobre q_1 necesitamos los campos eléctricos y magnéticos de q_2 en $\mathbf{r} = -v_1 \Delta t \hat{x}$ a $t = t_2$. Estos son

$$\mathbf{E}_2(t_2, x_1, 0, 0) = q_2 \frac{\gamma_2 v_1 (t_2 - t_1)}{(v_1^2 (t_2 - t_1)^2)^{3/2}}\hat{x} = -\frac{q_2 \gamma_2}{v_1^2 \Delta t^2}\hat{x} \to \mathbf{B}_2(t_2, x_1, 0, 0) = \frac{q_2 \gamma_2}{v_1^2 \Delta t^2}\hat{z}$$

Entonces, la fuerza de q_2 sobre q_1 es

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{q_1 q_2 \gamma_2}{v_1^2 \Delta t^2}(\hat{x} - \beta_2 \hat{z}).$$

Uno esperaría que al ser cargas eléctricas la fuerza que se ejercen mutuamente no solo vaya en la dirección que las une sino, y más importante, que además cumplan la tercera ley de Newton. Sin embargo no ocurre. Esto nos dice entonces que la fuerza persé no es un invariante de Lorentz; y esto puede en virtud de cómo entendemos que transforma el espaciotiempo, y a posteriori, podemos decir que es esperable pues la fuerza es la variación del impulso lineal en el tiempo pero ahora el tiempo no tiene un rol especial.

Para dar una idea de cómo obtener una dinámica covariante debemos entender que la trayectoria espaciotemporal de una partícula ahora puede estar parametrizada por cualquier variable. Entonces si desde un sistema $\mathcal{S}$ con coordenadas t y $\mathbf{r}$ veo a una partícula con velocidad $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$; instantáneamente podría pasarme a un sistema de referencia $\mathcal{S}'$ que en el cual la partícula estuviera en *reposo*. El tiempo τ que transcurre en ese movimiento instantáneo es lo que se define como *tiempo propio*. Entonces podemos aprovechar el invariante para determinar que

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - |d\mathbf{r}|^2 \to dt^2 = \gamma^2(\mathbf{u}) d\tau^2$$

De manera que podemos parametrizar la trayectoria en función al tiempo propio[4] y con esto obtener que la velocidad de la partícula es

$$x^\mu = (ct(\tau), \mathbf{r}(\tau)) \to \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dct}{d\tau} = c\gamma, \frac{dt}{d\tau}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \gamma \mathbf{u} \right) = \gamma(\mathbf{u}(t))(c, \mathbf{u}(t))$$

[4]Para esta parametrización es necesario considerar que, de la igualdad obtenida a partir del invariante, $\frac{dt}{d\tau} = +\gamma(\mathbf{u})$

A partir de esto definimos el momento lineal relativista de una partícula que se mueve con velocidad $\mathbf{u}(t)$, desde el sistema de referencia $\mathcal{S}$, como

$$p^\mu = \left(\frac{U}{c} = \gamma mc, \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{u}\right) = m\gamma(\mathbf{u}(t))(c, \mathbf{u}(t)).$$

La dinámica de la partícula debida a un campo electromagnético está dado por la generalización covariante de las ecuaciones de Newton

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{mc} F^\mu{}_\nu \, p^\nu.$$

La componente temporal de esta ecuación da ley de Joule

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{q}{mc} F^0{}_\nu p^\nu \to \frac{dU}{d\tau} = q\gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} \to \frac{dU}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}.$$

donde usamos regla de la cadena y que $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$. Las componentes espaciales recuperan las ecuaciones de Newton

$$\begin{aligned}
\frac{dp^i}{d\tau} &= \frac{q}{mc} F^i_\nu p^\nu \\
&= \frac{q}{mc} F^i_0 p^0 + \frac{q}{mc} F^i_j p^j \\
&= q\gamma E_i + q\frac{\gamma}{c} \epsilon_{ijk} B_k u_j \\
\frac{dp^i}{d\tau} &= \gamma(q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B})_i \to \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B}\right).
\end{aligned}$$

La ecuaciones a la que llegamos es aparentemente igual a la ecuación de Newton salvo por el hecho de que en este caso el momento lineal tiene incorporado el factor relativista. Es decir que a la hora de resolver la dinámica de una partícula debemos tomar $\mathbf{p} = m\gamma(\mathbf{u})\mathbf{u}$.

Veamos esto en el siguiente ejercicio.

(12) Encontrar la trayectoria de una partícula cargada en cada caso:

a) Movimiento en un campo eléctrico uniforme y estático, dirigido según el eje x. La condición inicial es $p_x = p_z = 0$ y $p_y = p_0$. Demostrar que en el límite no relativista se obtiene el resultado conocido de mecánica clásica, es decir, una parábola.

b) Movimiento en un campo magnético uniforme y estático.

c) Movimiento en campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ cruzados, perpendiculares entre sí, uniformes y estáticos. Considerar los tres casos posibles: (a) $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$, (b) $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$ y (c) $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$.

Veamos el primer ítem: Supongamos una carga q inmersa en un campo eléctrico $\mathbf{E} = E_0\hat{x}$ y magnético $\mathbf{B} = 0$. A tiempo $t = 0$ su momento inicial es $\mathbf{p}_0 = p_0\hat{y}$. Por un lado, la componente temporal nos dice lo esperado, el campo eléctrico hace trabajo sobre la partícula de manera que la energía cinética no se conserva; i.e.

$$\frac{dU}{dt} = qE_0u_x.$$

Las componentes espaciales dan la evolución del momento lineal

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= qE_0 & &\rightarrow p_x(t) = qE_0t \\ \frac{dp_y}{dt} &= 0 & &\rightarrow p_y(t) = p_0 \\ \frac{dp_z}{dt} &= 0 & &\rightarrow p_z(t) = 0 \end{aligned}$$

De modo que, pese a tener $\gamma = \gamma(\mathbf{u}(t))$, podemos determinar la velocidad de la partícula de forma implícita

$$\mathbf{u} = \frac{qE_0t}{m\gamma(\mathbf{u}(t))}\hat{x} + \frac{p_0}{m\gamma(\mathbf{u}(t))}\hat{y}$$

Usando la solución $\mathbf{p}(t)$ podemos despejar $\gamma = \gamma(t)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}(t)|^2 &= q^2E_0^2t^2 + p_0^2 \\ \gamma^2m^2|u(t)|^2 &= q^2E_0^2t^2 + p_0^2 \qquad \gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{|u|^2}{c^2}} \rightarrow |u(t)|^2 = c^2\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right) \\ m^2c^2\gamma^2\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right) &= q^2E_0^2t^2 + p_0^2 \\ \frac{1}{\gamma^2} &= \frac{m^2c^2}{m^2c^2 + p_0^2 + q^2E_0^2t^2} \end{aligned}$$

Finalmente la velocidad de la carga es

$$\mathbf{u} = \frac{qE_0ct}{\sqrt{m^2c^2 + p_0^2 + q^2E_0^2t^2}}\hat{x} + \frac{cp_0}{\sqrt{m^2c^2 + p_0^2 + q^2E_0^2t^2}}\hat{y}$$

Notemos que cuando $t \to \infty$ la velocidad $\mathbf{u} \to \mathbf{u}_\infty = c\hat{x}$ como es esperado; luego de que el campo eléctrico haga todo el trabajo que puede sobre la carga, esta no se puede mover más rápido que la luz.

Integrando $\mathbf{u}(t)$ con alguna posición inicial arbitraria $\mathbf{r}_0$ tenemos

$$\mathbf{r}(t) = \frac{c}{qE_0}\sqrt{m^2c^2 + p_0^2 + q^2E_0^2t^2}\,\hat{x} + \frac{cp_0}{qE_0}\text{arctanh}\left(\frac{qE_0t}{\sqrt{m^2c^2 + p_0^2 + q^2E_0^2t^2}}\right)\hat{y} + \mathbf{r}_0$$

Podemos tomar $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$, o simplemente considerar $\Delta\mathbf{r}$, y despejar la curva que traza la trayectoria en el plano xy, es decir $x(y)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{cp_0}{qE_0}\text{arctanh}\left(\frac{qE_0t}{\sqrt{m^2c^2 + p_0^2 + q^2E_0^2t^2}}\right) \\
\tanh^2\left(\frac{qE_0}{cp_0}y\right) &= 1 - \frac{m^2c^2 + p_0^2}{m^2c^2 + p_0^2 + q^2E_0^2t^2} \\
\frac{m^2c^2 + p_0^2}{1 - \tanh^2\left(\frac{qE_0}{cp_0}y\right)} &= m^2c^2 + p_0^2 + q^2E_0^2t^2 \\
(m^2c^2 + p_0^2)\cosh^2\left(\frac{qE_0}{cp_0}y\right) &= m^2c^2 + p_0^2 + q^2E_0^2t^2 \\
(m^2c^2 + p_0^2)\cosh^2\left(\frac{qE_0}{cp_0}y\right) &= \frac{q^2E_0^2}{c^2}x^2.
\end{aligned}$$

Finalmente despejamos la ecuación paramétrica

$$\frac{qE_0}{cp_0}x = \sqrt{1 + \frac{m^2c^2}{p_0^2}}\cosh\left(\frac{qE_0}{cp_0}y\right)$$

Las coordenadas, normalizadas por una escala de longitud $\frac{cp_0}{qE_0}$, forman una curva $x \sim \cosh y$.

Sigamos con el ítem (b). Ahora una carga q está rodeada por un campo magnético $\mathbf{B} = B_0\hat{x}$ y $\mathbf{E} = 0$. Como condición inicial tomamos $\mathbf{p} = p_0\hat{y}$. Entonces, por un lado, la ley de Joule nos dice

$$\frac{dU}{dt} = mc^2\frac{d\gamma}{dt} = 0 \to \gamma = \gamma_0.$$

Como γ es una constante y esta solo depende del módulo de la velocidad entonces $|\mathbf{u}|$ también es una constante. Veamos entonces la fuerza:

$$\begin{aligned}
m\gamma\frac{du_x}{dt} &= 0 && \rightarrow \frac{du_x}{dt} = 0 \\
m\gamma\frac{du_y}{dt} &= \frac{qB_0}{c}u_z && \rightarrow \frac{du_y}{dt} = \frac{\omega}{\gamma}u_z \\
m\gamma\frac{du_z}{dt} &= -\frac{qB_0}{c}u_y && \rightarrow \frac{du_z}{dt} = -\frac{\omega}{\gamma}u_z
\end{aligned}$$

La primer ecuación nos dice que la componente en x de la velocidad se conserva. Eso está bien, es lo que esperamos; es lo que suele hacer el campo magnético, modificar la velocidad en el plano ortogonal $\mathbf{B}$. En particular la trayectoria de la partícula, en el plano, es una orbita circular pero en este caso vemos que la frecuencia está modulada por el factor $\frac{1}{\gamma}$. Esto lo vemos en las otras dos ecuaciones donde definimos la frecuencia $\omega = \frac{qB_0}{cm}$, la frecuencia del ciclotrón, que tendría la carga para la fuerza no-relativista. Siguiendo el procedimiento típico, las componentes de la velocidad u_y y u_z deben cumplir

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) + \frac{\omega^2}{\gamma^2}f(t) = 0.$$

Veamos cómo es γ en función del dato inicial p_0. Por un lado, como ya usamos en el ítem anterior, tenemos $u_0^2 = c^2\left(1 - \frac{1}{\gamma_0^2}\right)$ entonces

$$p_0 = \gamma_0 m u_0 \rightarrow \gamma_0^2 u_0^2 = \frac{p_0^2}{m^2} \rightarrow \gamma_0^2 = 1 + \frac{p_0^2}{m^2c^2}.$$

Volviendo a la velocidad, dado que ambas cumplen la ecuación del oscilador armónico con frecuencia $\frac{\omega}{\gamma}$; las soluciones genéricas para ambas componentes deben ser de la forma $u_y(t) = A\cos\left(\frac{\omega}{\gamma}t + \alpha\right)$ y $u_z(t) = B\sin\left(\frac{\omega}{\gamma}t + \beta\right)$.

De las ecuaciones de movimiento se sigue que

$$\begin{aligned}
A\sin\left(\frac{\omega}{\gamma}t + \alpha\right) &= -B\sin\left(\frac{\omega}{\gamma}t + \beta\right) \\
A\cos\left(\frac{\omega}{\gamma}t + \alpha\right) &= -B\cos\left(\frac{\omega}{\gamma}t + \beta\right)
\end{aligned}$$

Dividiendo ambas ecuaciones llegamos a $\tan\left(\frac{\omega}{\gamma}t + \alpha\right) = \tan\left(\frac{\omega}{\gamma}t + \beta\right)$; condición que se puede satisfacer si $\alpha = \beta$. Por lo tanto $A = -B$. Como

$u_z(0) = 0$, solo puede ser $\alpha = \beta = 0$. Y por la condición inicial $u_y(0) = A = u_0$. Aplicando estas condiciones

$$\mathbf{u}(t) = u_0 \cos \frac{\omega}{\gamma} t\hat{y} - u_0 \sin \frac{\omega}{\gamma} t\hat{z} = u_0 \hat{\varphi} \left(\frac{\omega t}{\gamma} \right).$$

con $\hat{\varphi}$ el versor azimutal alrededor del eje $\hat{x}$. Recuperamos la solución no-relativista pero con una frecuencia de oscilación modificada. La trayectoria, nuevamente, se puede resolver como una circunferencia en el plano xy.

Finalicemos con el ítem (c), veamos que la solución es un tanto más complicada. Los primeros dos casos, cuando las intensidades son distintas en módulo, es fácil determinar la trayectoria de la carga. Sabemos que si $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$, existe un sistema de referencia en el que se anule el campo eléctrico. Y si $|\mathbf{B}| < |\mathbf{E}|$, se puede anular el campo magnético en otro sistema de referencia. Estas dos situaciones son las que ya resolvimos. Resolvamos la dinámica en cuando $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$. En este caso la carga se mueve en un campo magnético $\mathbf{B} = B_0\hat{z}$ y campo eléctrico $\mathbf{E} = E_0\hat{y}$ tal que $E_0 = B_0$. El caso en que tienen signo contrario es totalmente análogo.

Nuevamente, de la ley de Joule

$$\frac{dU}{dt} = qB_0 u_y$$

sabemos que la energía no se conserva. De las ecuaciones de Newton

$$\begin{aligned}
\frac{dp_x}{dt} &= qB_0 \frac{u_y}{c}, \\
\frac{dp_y}{dt} &= qB_0 \left(1 - \frac{u_x}{c}\right), \\
\frac{dp_z}{dt} &= 0.
\end{aligned}$$

Como es esperado, dado que $\mathbf{E}$ va en $\hat{y}$ y $\mathbf{B}$ en $\hat{z}$ no hay fuerza en la dirección de z y por lo tanto el momento $p_z = p_z^0$ se conserva. Notemos que de las ecuaciones para U y p_x podemos obtener la siguiente cantidad conservada:

$$\frac{d(U - cp_x)}{dt} = 0 \rightarrow U - cp_x = \alpha$$

Por otro lado, $U^2 = m^2c^4 + |\mathbf{p}|^2c^2$; entonces

$$U^2 - p_x^2c^2 = m^2c^4 + p_z^2c^2 + p_y^2c^2 \rightarrow U + cp_x = \frac{1}{\alpha}(m^2c^4 + (p_z^0)^2c^2 + p_y^2c^2).$$

De esta manera podemos despejar U y cp_x en términos de la constante α, a determinar, $\epsilon^2 = m^2c^4 + (p_z^0)^2c^2$ y la variable p_y como

$$\begin{aligned} U &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\epsilon^2 + c^2p_y^2}{2\alpha} \\ cp_x &= -\frac{\alpha}{2} + \frac{\epsilon^2 + c^2p_y^2}{2\alpha} \end{aligned}$$

La constante α se puede determinar a partir de las condiciones iniciales para la velocidad o para el momento lineal. Si la condición inicial es $\mathbf{p}_0$:

$$\begin{aligned} \alpha &= U - cp_x \\ &= \sqrt{m^2c^4 + |\mathbf{p}|^2c^2} - cp_x \\ \alpha &= \sqrt{m^2c^4 + |\mathbf{p}_0|^2c^2} - cp_{0x} \end{aligned}$$

Volviendo a la resolución del problema, basta con determinar la relación entre p_y y t. Veamos que esta sale de la ecuación p_y:

$$\begin{aligned} \frac{dp_y}{dt} &= qB_0\left(1 - \frac{u_x}{c}\right) \\ U\frac{dp_y}{dt} &= qB_0\left(U - m\gamma c^2\frac{u_x}{c}\right) \qquad \color{red}{U = m\gamma c^2 \text{ y } p_x = m\gamma u_x} \\ U\frac{dp_y}{dt} &= qB_0\alpha \\ \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\epsilon^2 + c^2p_y^2}{2\alpha}\right) dp_y &= qB_0\alpha dt. \end{aligned}$$

Acomodando un poco los coeficientes e integrando cada lado respecto a la coordenada correspondiente obtenemos la ecuación implícita

$$\left(1 + \frac{\epsilon^2}{\alpha^2}\right) p_y + \frac{c^2}{3\alpha^2}p_y^3 = 2qB_0t.$$

Acá es dónde el problema se complica un poco. Esta ecuación es solo una cúbica de la cual podemos despejar $p_y(t)$ pero está la forma funcional es medio compleja como para arrastrarla. Lo importante son dos cosas; en primer lugar que es invertible y, como muestra la figura (2) de las tres raices de esta cúbica, solo una es real. Entonces la relación de $p_y(t)$ es única.

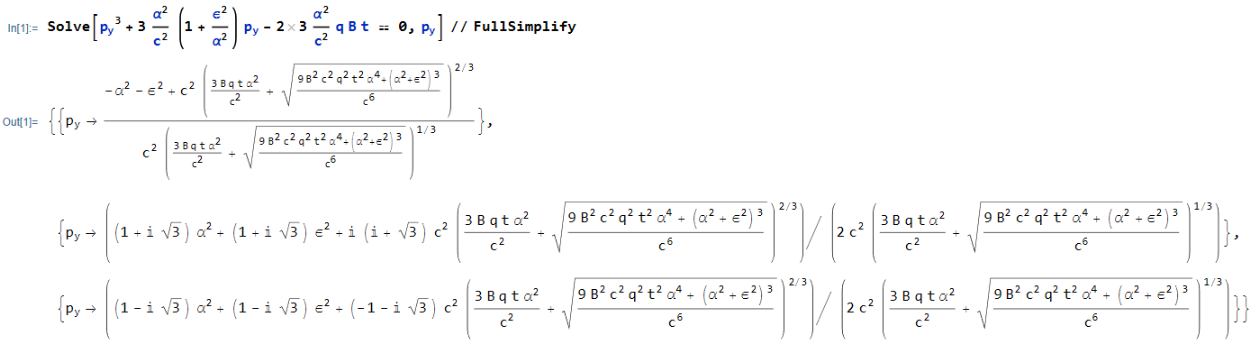

Figura 2: Soluciones posibles para $p_y(t)$ que salen de la polinomio cúbico. Solo una de ellas es real.

En conclusión, es equivalente parametrizar la trayectoria en función del tiempo o en función del momento p_y. Obtengamos x, y y z en función de la variable p_y. Para x, notemos primero que la velocidad es

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{m\gamma u_x}{m\gamma} \\
\frac{dx}{dt} &= c^2 \frac{p_x}{U} \\
\frac{dx}{dp_y}\frac{dp_y}{dt} &= c^2 \frac{p_x}{U} \\
\frac{dx}{dp_y}\frac{qB_0\alpha}{U} &= cp_x \frac{c}{U} \\
\frac{dx}{dp_y} &= \frac{c}{qB_0\alpha} cp_x \\
\frac{dx}{dp_y} &= \frac{c}{2qB_0}\left(-1 + \frac{\epsilon^2 + c^2 p_y^2}{\alpha^2}\right)
\end{aligned}
$$

De esta manera obtuvimos una ecuación para integrar $x(p_y)$. Análogamente, haciendo lo propio con el resto de las coordenadas obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones del cual integramos la trayectoria

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dp_y} &= \frac{c}{2qB_0}\left(-1+\frac{\epsilon^2+c^2p_y^2}{\alpha^2}\right) && \to x = \frac{c}{2qB_0}\left(-1+\frac{\epsilon^2}{\alpha^2}\right)p_y + \frac{c^3}{6qB_0\alpha^2}p_y^3 + x_0 \\
\frac{dy}{dp_y} &= \frac{c^2}{q\alpha B_0}p_y && \to y = \frac{c^2}{2\alpha qB_0}p_y^2 + y_0 \\
\frac{dz}{dp_y} &= \frac{c^2}{qB_0\alpha}p_z^0 && \to z = \frac{c^2p_z^0}{2\alpha qB_0}p_y + z_0
\end{aligned}
$$

Podríamos obtener $p_y(t)$ y determinar $\mathbf{r}(t)$, o bien despejar p_y en función de alguna de las coordenadas y escribir la curva en el espacio.