

## FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2024

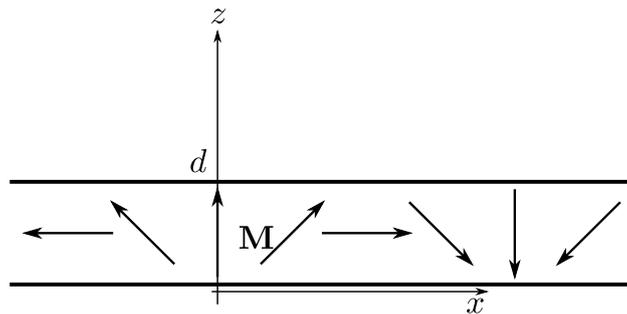
### GUÍA 3: MEDIOS MATERIALES Y DESARROLLO MULTIPOLAR

#### Medios magnéticos: imanes permanentes, permeables y corrientes magnéticas

- Imán dipolar puro.* Una esfera de radio  $a$  está uniformemente magnetizada con una magnetización permanente  $\mathbf{M} = M \hat{z}$ .
  - Calcular las fuentes de  $\mathbf{H}$  e identificar el problema eléctrico equivalente. Calcular los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  usando la integral de Poisson para el potencial escalar magnético  $\Phi_{\mathbf{H}}$ , continuo en todo el espacio y tal que  $-\nabla\Phi_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ . Comparar el potencial en el exterior de la esfera con el que produciría un dipolo magnético puntual igual al momento dipolar total del imán esférico.
  - Calcular el potencial escalar magnético  $\Phi_{\mathbf{H}}$  usando ahora separación de variables en esféricas.
  - Calcular el potencial vector  $\mathbf{A}$  mediante la integral de Poisson y, a partir de ahí,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ .
  - La misma esfera magnetizada está ahora situada en un medio lineal, isótropo y homogéneo de permeabilidad  $\mu$ , que se extiende entre  $r = a$  y  $r = b > a$ , concéntrico con la esfera. Calcule los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en todo el espacio y encuentre el momento magnético total  $\mathbf{m}$  inducido en el medio. Verifique que para  $\mu = 1$  se obtienen los resultados de los ítems anteriores.
- Imán cilíndrico.* Un cilindro de radio  $a$  y longitud  $L$  está orientado según la dirección  $z$ , con sus tapas en  $z = \pm L/2$ , y está caracterizado por una densidad de magnetización uniforme  $\mathbf{M} = M \hat{z}$ .
  - Mediante la integral de Poisson, calcular el potencial vector  $\mathbf{A}$  en coordenadas cilíndricas desarrollado según las funciones de Bessel  $J_{\nu}(k\rho)$ , y a partir de ahí calcular los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ . (Ayuda: en la integral de Poisson, escribir  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$  según el tipo de desarrollo buscado.)
  - Mediante la integral de Poisson, calcular el potencial vector  $\mathbf{A}$  en coordenadas cilíndricas desarrollado como una integral de Fourier en  $z$ , y a partir de ahí calcular los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ .
  - Calcular los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  a partir de un potencial escalar magnético  $\Phi_{\mathbf{H}}$ , continuo en todo el espacio y tal que  $-\nabla\Phi_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ . Escribir  $\Phi_{\mathbf{H}}$  como un desarrollo en las funciones de Bessel  $J_{\nu}(k\rho)$  o como una integral de Fourier en  $z$ . Comparar, según el caso, con los ítems (a) y (b).
  - ¿A qué distribución de corriente es equivalente este imán?
  - A partir del campo del imán, calcular el campo  $\mathbf{B}$  producido por un solenoide cilíndrico, de radio  $a$  y longitud  $L$ , por el que circula una corriente  $I$  y que tiene  $n$  espiras por unidad de longitud.
  - Calcular explícitamente los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  del imán cuando  $L \rightarrow \infty$ .
  - Demuestre, por analogía, que el campo magnético de un solenoide infinito de sección arbitraria es cero en su exterior y constante en su interior.
- Matriz de Halbach (o Imán Borgeano, según el poeta).* Para que no se acostumbren a pensar que todos los imanes tienen una magnetización uniforme, aquí se les propone el caso de un imán limitado por los planos  $z = 0$  y  $z = d$ . En las direcciones  $x$  e  $y$  se extiende entre  $-\infty$  y  $+\infty$ . La densidad de magnetización dentro del imán está dada por

$$\mathbf{M}(x) = m_0 (\sin qx \hat{x} + \cos qx \hat{z}),$$

con  $q > 0$ . Es decir, según un corte en el plano  $xz$ , la magnetización va rotando como en la figura de abajo.



Problema 3.

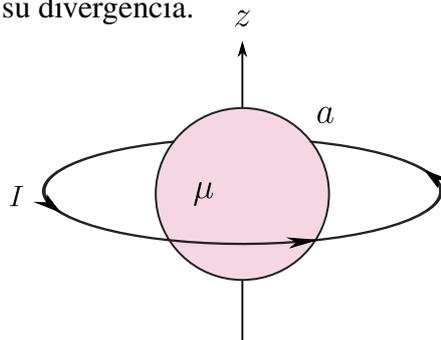
Puesto que la magnetización es permanente y conocida en todo el espacio, el paso a un problema electrostático equivalente es el camino más sencillo. Pero como  $\mathbf{M}$  no es uniforme, puede haber cargas superficiales y de volumen,

$$\sigma = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \cdot \mathbf{n}, \quad \rho = -\nabla \cdot \mathbf{M}.$$

- (a) Calcular el potencial escalar para el campo  $\mathbf{H}$  y el campo magnético en todo el espacio, pero especialmente en las regiones por encima y por debajo del imán. *Ayuda:* Integrar la función de Green para cada contribución.
- (b) La solución es una expresión cerrada que no incluye sumatorias ni integrales. Cuando la obtengan, hagan un poco de ingeniería inversa: analicen a posteriori qué tipo de cosas podrían haber deducido a priori. Esto, en algunos ámbitos, recibe el nombre de *mixtificación*, o también *trampa*, pero en física suele ser el camino normal cuando uno se enfrenta a problemas nuevos. Con la solución a la vista, súbitamente se vuelven triviales varias cosas, y entonces pueden dar una solución más compacta y razonada.
- (c) Si el resultado no les parece desconcertante, es que hicieron algo mal o que no tienen corazón. Por fin, ¿dónde está lo borgeano de este imán? Descubran ustedes en qué línea del poema *La cierva blanca* se esconde una referencia borgeana al imán que acabamos de describir.

4. *Saturno (Corrientes libres y magnéticas)*. Una esfera de radio  $a$ , magnetizable con permeabilidad  $\mu$ , está centrada con una espira de radio  $b > a$  por donde circula una corriente  $I$ , como muestra la figura.

- (a) Indicar todas las fuentes de cada uno de los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ .
- (b) ¿Por qué no es cierto que  $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_{\mathbf{H}}$ ? (con  $\Phi_{\mathbf{H}}$  el potencial escalar magnético continuo en todo el espacio).
- (c) Calcular el campo magnético en todo el espacio en términos del campo  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_d$ , con fuentes en su rotor y fuentes en su divergencia.

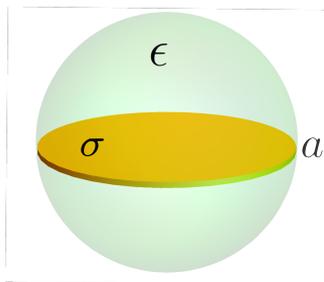


Problema 4.

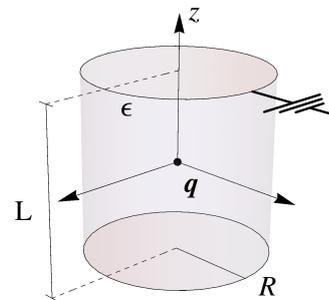
### Dieléctricos, electretes y conductores.

5. Una cáscara esférica de radio  $b$  con densidad superficial de carga eléctrica  $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ , produce un campo uniforme  $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{z}$  en el interior, con  $E_0 = -4\pi\sigma_0/3$ , y  $\theta$  el ángulo cenital medido desde el eje  $z$ . Dentro de la cáscara se ubica una esfera concéntrica de radio  $a < b$  con un material dieléctrico L.I.H. de permitividad  $\epsilon$  en su interior.
- (a) Calcular el potencial y el campo eléctrico en todo el espacio. Hallar la distribución de cargas de polarización en el medio y el momento dipolar del dieléctrico.
  - (b) Asumir que la susceptibilidad eléctrica  $\chi_e = \frac{\epsilon-1}{4\pi}$  es muy baja y obtener el campo dentro del dieléctrico utilizando el siguiente método de *aproximaciones sucesivas*: Como punto de partida pensar que dentro del dieléctrico se tiene sólo  $\mathbf{E}_0$  y que el medio se polariza, como primer aproximación, con el campo  $\mathbf{P}_1 = \chi_e \mathbf{E}_0$ . Las cargas de polarización asociadas a  $\mathbf{P}_1$  producen un campo eléctrico  $\mathbf{E}_1$ . Luego, la polarización se modifica en una cantidad  $\mathbf{P}_2 = \chi_e \mathbf{E}_1$  que, a su vez, genera un campo  $\mathbf{E}_2$ , y así sucesivamente. Repetir el procedimiento para obtener la corrección  $\mathbf{E}_i$  y corroborar que la suma  $\mathbf{E} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{E}_i$  coincide con el campo interior ( $r < a$ ) del ítem (a).
  - (c) Analizar por qué el campo  $\mathbf{P}$  en el interior preserva la dirección de las líneas del campo externo  $\mathbf{E}_0$ . ¿Es esta una característica general de la polarización en un M.L.I.H.? ¿Qué pasa en el caso límite  $\epsilon \rightarrow \infty$ ?
6. Una esfera conductora de radio  $a$  está a potencial cero. Entre  $r = a$  y  $r = b$  hay un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ , y ubicada a una distancia  $r'$  del origen hay una carga  $q$ . Considerar separadamente los dos casos  $a < b < r'$  y  $a < r' < b$ .
- (a) Identificar dónde se encuentran las cargas y hallar el potencial electrostático en todo punto del espacio.
  - (b) Calcular las densidades de carga de polarización en volumen y superficie, y las densidades de carga libre en todo el espacio.
  - (c) Analizar los casos  $\epsilon = 1$  y  $\epsilon \rightarrow \infty$ . ¿Cuál es la interpretación física de los resultados?
- Ayuda:* usar la forma genérica del potencial de una cáscara cargada frente a una esfera (que puede deducirse en una línea), y bastará plantear una sola ecuación con una sola incógnita. En otro caso tendrá que plantear 5 ecuaciones con 5 incógnitas.
7. (a) En un medio de constante dieléctrica  $\epsilon$  se sumerge una esfera conductora de radio  $a$  cargada con una carga total  $Q$ . Hallar los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en todo punto del espacio y las distribuciones de carga libre en el conductor y de polarización en el dieléctrico.
- (b) Calcular  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  si en lugar de fijar  $Q$ , la esfera conductora se conecta ahora a un potencial  $V$ .
  - (c) Si bien existe una analogía formal entre ambos casos, hay una diferencia esencial entre ellos: la dependencia de los campos con  $\epsilon$ . Explicar las causas de esta diferencia.
8. Un medio dieléctrico de permitividad  $\epsilon$  ocupa el semiespacio con  $z < 0$ . A una altura  $d > 0$  sobre el dieléctrico hay una carga  $q$ .
- (a) Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio: (i) usando separación de variables en coordenadas cartesianas, y (ii) usando separación de variables en coordenadas cilíndricas.

- (b) Para cada una de las expresiones obtenidas en (a), identifique la contribución al potencial asociada exclusivamente a la carga  $q$ . Es decir, escriba  $\phi = \phi_q + \phi_r$ , donde  $\phi_q$  es el potencial de la carga original. ¿A qué simple distribución de cargas puntuales puede atribuirse, en cada región, la parte restante del potencial,  $\phi_r$ ?
- (c) ¿A qué se reduce la solución cuando  $\varepsilon \rightarrow \infty$ ? ¿Cuál es la interpretación física de este resultado?
- (d) Generalice los resultados anteriores al caso en que el semiespacio superior está ocupado por un medio con permitividad  $\varepsilon_1$  y el inferior por un medio con permitividad  $\varepsilon_2$ . En términos de las permitividades, ¿cuál es la magnitud que caracteriza al problema?
9. Hallar el potencial electrostático en todo el espacio producido por la configuración de la figura: un disco de radio  $a$  y densidad superficial uniforme  $\sigma$  ubicado dentro de una esfera dieléctrica del mismo radio y permitividad  $\varepsilon$ .
10. Una carga puntual  $q$  se ubica en el centro de un cilindro conductor cuyo interior está relleno con un material dieléctrico de constante uniforme  $\varepsilon$ . El cilindro tiene sección circular de radio  $R$  y altura  $L$ , se encuentra centrado en el origen y conectado a tierra (sus 2 tapas y su cara lateral).
- (a) Encontrar el potencial electrostático  $\Phi$  en todo el espacio.
- (b) Calcular todas las distribuciones de carga libres y de polarización e indicar dónde se ubican. ¿Cuánta carga se induce en el conductor?
- (c) El dispositivo se enfría de forma tal que el dieléctrico se vuelve un material de polarización permanente, un *electrete*. Posteriormente se remueve el caparazón conductor sin alterar al electrete, quedando la carga  $q$  en el centro del cilindro macizo de polarización permanente: ¿Cómo es el campo eléctrico en la región exterior del conjunto electrete y carga  $q$ ?



Problema 9..



Problema 10..

### Momentos multipolares.

11. (a) Probar que los momentos multipolares de una distribución de carga con simetría esférica son nulos salvo el monopolar.
- (b) Probar que el momento dipolar de una distribución de carga neutra no depende del origen. En general, probar que el primer momento multipolar no nulo es independiente del origen.
- (c) Encontrar las expresiones para los momentos multipolares (en esféricas) de una distribución con simetría azimutal y escribir la expansión correspondiente.
12. Analizar los momentos multipolares, hasta el cuadrupolar, de las siguientes distribuciones de carga, y en el caso de tener momento cuadrupolar determinar sus ejes principales:

- (a) Un anillo de radio  $a$  cargado uniformemente con carga total  $Q$ .
- (b) Un disco cargado con una distribución cilíndricamente simétrica respecto de su eje.
- (c) Un cubo uniformemente cargado en volumen. Estimar el error en el *campo eléctrico* si a un cubo de 10 cm de lado se lo considera como una carga puntual a distancias del orden de 1 m de su centro. ¿A qué distancia el error es del orden del 1 %?
13. Calcule todos los momentos multipolares del problema del anillo de la Guía 2 (anillo de radio  $b$ , cargado uniformemente, concéntrico con una esfera a tierra de radio  $a < b$ ), y del problema del disco uniformemente cargado, de radio  $a$ , de la misma Guía.
14. ¿Es lo mismo tener una gran distribución de carga lejos que una pequeña distribución cerca? Calcular la densidad  $\rho_\alpha$  de una distribución de carga  $\rho$  que se ha expandido o contraído uniformemente un factor  $\alpha$ . Expansión significa  $\alpha > 1$ , y contracción,  $0 < \alpha < 1$ . Geométricamente, la transformación lleva el punto  $\mathbf{r}$  al punto  $\alpha\mathbf{r}$ , y la carga contenida en el elemento de volumen  $d^3\mathbf{r}$  al elemento de volumen  $d^3(\alpha\mathbf{r})$ . ¿Cuál es el potencial  $\Phi_\alpha$  de la distribución transformada en términos del potencial original  $\Phi$ ? ¿Cómo se relacionan entre sí los momentos multipolares de orden  $l$ ,  $Q_\alpha^{(lm)}$ , de la distribución transformada y los momentos  $Q^{(lm)}$  de la original? Volviendo a la pregunta inicial: ¿en qué sentido es equivalente ver una distribución desde una distancia  $L = \alpha d$ , con  $\alpha > 1$ , a verla desde una distancia  $d$  pero contraída un factor  $1/\alpha$ ?

$$\text{Respuestas: } d_\alpha^{-\alpha} \Phi_\alpha(\mathbf{r}) = \left(\frac{\alpha}{\mathbf{r}}\right) d_\alpha^{-\alpha} \Phi\left(\frac{\mathbf{r}}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathbf{r}}\right) d_\alpha^{-\alpha} \Phi\left(\frac{\mathbf{r}}{\alpha}\right)$$