Separación de Variables en Coordenadas Esféricas

4 de septiembre de 2024

Armónicos Esféricos

La solución más general a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es

$$\boxed{\Phi = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(A_{lm} r^{l} + B_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi)}, \tag{1}$$

con $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ los *armónicos esféricos*

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m \left[\cos\left(\theta\right)\right] e^{im\varphi} \tag{2}$$

donde P_l^m son los *polinomios asociados de Legendre*.

Armónicos Esféricos

Los armónicos esféricos son una base *ortonormal* para las funciones definidas en un ángulo sólido.
Es decir, una función $f(\theta, \varphi)$ puede expandirse como

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} f_{lm} Y_{lm} (\theta, \varphi) \,, \tag{3a}$$

donde los coeficientes de la expansión están dados por

$$f_{lm} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) Y_{lm}^* (\theta, \varphi) \sin (\theta) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \,. \tag{3b}$$

Toda base ortogonal satisface dos relaciones: ortogonalidad y completitud/clausura.

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{lm} (\theta, \varphi) \, Y_{l'm'}^* (\theta, \varphi) \sin (\theta) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} & \text{(Ortogonalidad)} \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') = \frac{\delta(\theta - \theta')\delta(\varphi - \varphi')}{\sin \theta} & \text{(Completitud)} \end{cases}$$

Polinomios de Legendre

Se definen los *polinomios de Legendre* como

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2 - 1\right)^l \qquad \text{(Fórmula de Rodrigues)}$$

Por razones históricas, están normalizados como

$$P_l(1) = 1 \qquad \text{(Normalización)}$$

Son polinomios de grado l. Tienen la paridad de su l.

$$\begin{cases} P_l(-1) = (-1)^l \\ P_{2l+1}(0) = 0 \end{cases}$$

Satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad y completitud:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\pi} P_l\left[\cos\left(\theta\right)\right] P_{l'}\left[\cos\left(\theta\right)\right] \sin\left(\theta\right) \mathrm{d}\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} & \text{(Ortogonalidad)} \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} P_l\left[\cos\left(\theta\right)\right] P_l\left[\cos\left(\theta'\right)\right] = \frac{\delta\left(\theta - \theta'\right)}{\sin\left(\theta\right)} & \end{cases}$$

Polinomios Asociados de Legendre

Se definen los *polinomios asociados de Legendre* como

$$P_l^m(x) = (-1)^m \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x) \qquad m \geq 0 \tag{4a}$$

y

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)} P_l^m(x) \tag{4b}$$

Para $m = 0$,

$$P_l^0(x) = P_l(x) \tag{5}$$

Como $Y_{lm} \propto e^{im\varphi}$,

$$\text{simetría azimutal} \iff \text{independencia de } \varphi \iff m = 0$$

Entonces, en la expansión sólo aparecen

$$Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cancelto{1}{\frac{(l-0)!}{(l+0)!}}} P_l^0 \left[\cos\left(\theta\right)\right] \cancelto{1}{e^{i \cdot 0 \cdot \varphi}} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l \left[\cos\left(\theta\right)\right]$$

y la solución más general se simplifica a

$$\boxed{\Phi = \sum_{l=0}^{+\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l \left[\cos\left(\theta\right)\right]} \tag{6}$$