Campos Eléctrico y Magnético de una Carga Puntual en Movimiento Usando Transformaciones de Lorentz

Vamos a derivar el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y el campo magnético $\mathbf{B}$ de una carga puntual q que se mueve a velocidad constante $\mathbf{v}$ en el eje x. Calcularemos los campos en el sistema de referencia en el que la carga está en reposo y luego usaremos las transformaciones de Lorentz para obtener los campos en el sistema del observador (donde la carga está en movimiento).

Campos en el Sistema en Reposo de la Carga

En el sistema (primado) donde la carga está en reposo, el campo eléctrico es puramente radial y se obtiene mediante la ley de Coulomb:

$$\mathbf{E}' = \frac{q\mathbf{R}'}{R'^3} \tag{1}$$

donde R' es la distancia al punto de observación en el sistema de la carga.

En este sistema de referencia (que está fijo a la carga), no existe campo magnético ($\mathbf{B}' = 0$).

Transformaciones de Lorentz de los Campos

Cuando pasamos al sistema de referencia del observador (donde la carga se mueve a velocidad $\mathbf{v}$), los campos se transforman de acuerdo a las siguientes reglas de Lorentz (notar que son las transformaciones inversas con respecto a lo que vimos en la clase anterior):

- Transformación del Campo Eléctrico:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel} \tag{2}$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{E}'_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}'\right) = \gamma\mathbf{E}'_{\perp} \tag{3}$$

- Transformación del Campo Magnético:

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel} = 0 \tag{4}$$

$$\mathbf{B}_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}'_{\perp} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'}{c^2} \right) = -\gamma \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'}{c^2} \tag{5}$$

donde:

- $\parallel$ y $\perp$ se refieren a las componentes paralela y perpendicular a la dirección de movimiento de la carga.
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ con $\beta = v/c$.

Campo Eléctrico en el Sistema en Movimiento

En el sistema en movimiento, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ tiene dos componentes:

- Componente Paralela:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel} = q \frac{R' \cos\theta}{R'^3} \tag{6}$$

- Componente Perpendicular:

$$\mathbf{E}_{\perp} = \gamma \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma q \frac{R' \sin\theta}{R'^3} \tag{7}$$

Al combinarlas, obtenemos el campo eléctrico total en el sistema del observador:

$$\mathbf{E} = q \frac{(1-\beta^2)(\mathbf{R} - \beta R \hat{\mathbf{v}})}{\left[R^2 (1 - \beta^2 \sin^2\theta) \right]^{3/2}} \tag{8}$$

donde:

- $\beta = \frac{v}{c}$,
- $\mathbf{R}$ es el vector de posición desde la carga hasta el punto donde se calcula el campo,
- $R = |\mathbf{R}|$ es la distancia desde la carga,
- c es la velocidad de la luz.

Campo Magnético en el Sistema en Movimiento

Usando la transformación para el campo magnético:

$$\mathbf{B} = -\gamma \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'}{c^2} \tag{9}$$

Sustituyendo $\mathbf{E}'$ del sistema en reposo, obtenemos:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \tag{10}$$

Ejemplo sencillo

Calculemos **E** y **B** para una carga q moviéndose a $0.8c$ a lo largo del eje x, en un punto de observación en el plano perpendicular al movimiento.

Valores Numéricos

Para una carga q en el sistema de referencia del observador:
1. **Factor de Lorentz**: El factor de Lorentz está dado por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} \approx 1.667.$$

2. **Campo Eléctrico en el Plano Perpendicular**: el campo eléctrico **E** en el plano perpendicular al movimiento se obtiene como

$$E = \frac{q}{R^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}.$$

Para un punto de observación en el plano perpendicular (donde $\theta = 90°$), esto se simplifica a

$$E = \frac{q}{R^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{q}{R^2 \gamma^2}.$$

Sustituyendo el valor de γ calculado, tenemos

$$E = \frac{q}{R^2} \frac{1}{(1.667)^2} = \frac{q}{R^2 \cdot 2.778}.$$

3. **Campo Magnético en la Dirección z**: el campo magnético **B** se relaciona con el campo eléctrico mediante

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c}.$$

Dado que **v** y **E** son perpendiculares, y usando $v = 0.8c$, obtenemos que la magnitud del campo magnético en el plano perpendicular es

$$\mathbf{B} = \frac{0.8c}{c} E_y \hat{\mathbf{z}} = 0.8 E_y \hat{\mathbf{z}}.$$

Conclusión

El campo eléctrico y el campo magnético de una carga q moviéndose a velocidad constante $v = 0.8c$ se obtienen de la siguiente manera:

- El campo eléctrico en el plano perpendicular al movimiento es

$$E = \frac{q}{R^2 \cdot 2.778}.$$

- El campo magnético asociado, apuntando en la dirección z, es

$$\mathbf{B} = 0.8 E_y \hat{\mathbf{z}}.$$

Estas expresiones muestran que el campo eléctrico se concentra en el plano perpendicular al movimiento debido a la contracción relativista, mientras que el campo magnético es proporcional al campo eléctrico y apunta perpendicularmente al plano de movimiento.

Descripción del Campo Eléctrico de una Carga en Movimiento

Para una carga puntual q moviéndose a velocidad constante v a lo largo del eje x, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ presenta una forma característica debido a los efectos relativistas. La expresión para el campo eléctrico en el sistema del observador es:

$$\mathbf{E} = q \frac{(1-\beta^2)(\mathbf{R} - \beta R \hat{\mathbf{v}})}{\left[R^2(1-\beta^2 \sin^2\theta)\right]^{3/2}} \tag{11}$$

donde:

- $\beta = \frac{v}{c}$, con c siendo la velocidad de la luz.
- θ es el ángulo entre el vector de posición $\mathbf{R}$ y la dirección de movimiento de la carga $\mathbf{v}$.

En cartesianas

Podemos re-escribir las componentes del campo $\mathbf{E}$ en coordenadas cartesianas:

$$E_x = q \frac{\gamma(x - vt)}{[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]}$$

$$E_y = q \frac{\gamma y}{[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]}$$

$$E_x = q \frac{\gamma z}{[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]}$$

El campo de una carga puntual es reposo es radial, uniforme y cae como $1/R^2$ (en el sistema S'):

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{x - vt}{y} \quad ; \quad \frac{E_x}{E_z} = \frac{x - vt}{z} \quad ; \quad \frac{E_y}{E_z} = \frac{y}{z}$$

o sea, el campo es radial pero centrado en el punto donde está la carga a tiempo t ($x = vt$).

Pero no vale lo mismo en cualquier dirección a una misma distancia de la carga.

Supongamos $z = 0$ y en el sistema móvil $x = vt$ podemos pasar a coordenadas polares donde $r = (x - vt)^2 + y^2$, entonces las componentes del campo son:

$$E_x = \frac{q}{r^2} \frac{\gamma \cos\theta}{[\gamma^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta]^{3/2}}$$

y

$$E_y = \frac{q}{r^2} \frac{\gamma \sin\theta}{[\gamma^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta]^{3/2}}$$

Si ahora evaluamos las componentes del campo eléctrico cuasi-paralelas a la dirección de la velocidad, es decir $\theta \approx \epsilon$ con $\epsilon \to 0$, obtenemos

$$E_x = \frac{q}{r^2} \frac{\gamma}{[\gamma^2 + \epsilon^2]^{3/2}}$$

y

$$E_y = \frac{q}{r^2} \frac{\gamma\epsilon}{[\gamma^2 + \epsilon^2]^{3/2}}$$

Por lo tanto, el valor absoluto del campo es

$$E_{\|} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{q\gamma}{r^2} \frac{\sqrt{1 + \epsilon^2}}{[\gamma^2 + \epsilon^2]^{3/2}}$$

Si hacemos el mismo cálculo, pero para la direccion ortogonal, es decir $\theta = \pi/2 - \epsilon$, obtenemos:

$$E_x = \frac{q}{r^2} \frac{\gamma\epsilon}{[\gamma^2\epsilon^2 + 1]^{3/2}}$$

y

$$E_y = \frac{q}{r^2} \frac{\gamma}{[\gamma^2\epsilon^2 + 1]^{3/2}}$$

y, por lo tanto, podemos evaluar:

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{q\gamma}{r^2} \frac{\sqrt{1 + \epsilon^2}}{[\gamma^2\epsilon^2 + 1]^{3/2}}$$

Si ahora hacemos el cociente $E_{\|}/E_{\perp}$, tenemos:

$$\frac{E_{\|}}{E_{\perp}} = \left[\frac{\gamma^2\epsilon^2 + 1}{\gamma^2 + \epsilon^2}\right]^{3/2} \approx \left(\frac{1}{\gamma^2}\right)^{3/2} < 1.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que el campo en la dirección paralela a la velocidad es menos intenso que en la dirección perpendicular.

Características de las Líneas de Campo

Las líneas de campo eléctrico presentan las siguientes características:

- En la dirección transversal al movimiento (perpendicular al eje x), las líneas de campo se concentran debido al factor de Lorentz γ, lo que indica que el campo es más intenso en esta dirección.
- En la dirección longitudinal al movimiento (paralela al eje x), las líneas de campo se separan, indicando una menor densidad y un campo más débil.
- La distribución de las líneas de campo muestra que el campo eléctrico es más fuerte en la región perpendicular al movimiento de la carga y se atenúa en la dirección del movimiento.

Gráfico de las Líneas de Campo Eléctrico

A continuación se muestra una representación de las líneas de campo eléctrico de una carga en movimiento a lo largo del eje x usando Mathematica. El gráfico ilustra la concentración de las líneas en la dirección transversal al movimiento y su expansión en la dirección del movimiento. Esto depende mucho del valor de la velocidad v, que entra en el factor γ.

Out[∘]=

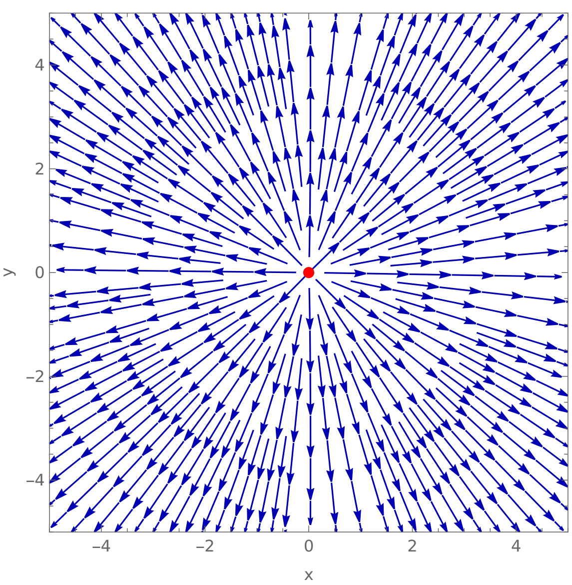

Figure 1: Este es el caso de una velocidad en la dirección $\hat{x}$, que tiene un valor $v/c = 0.01$.

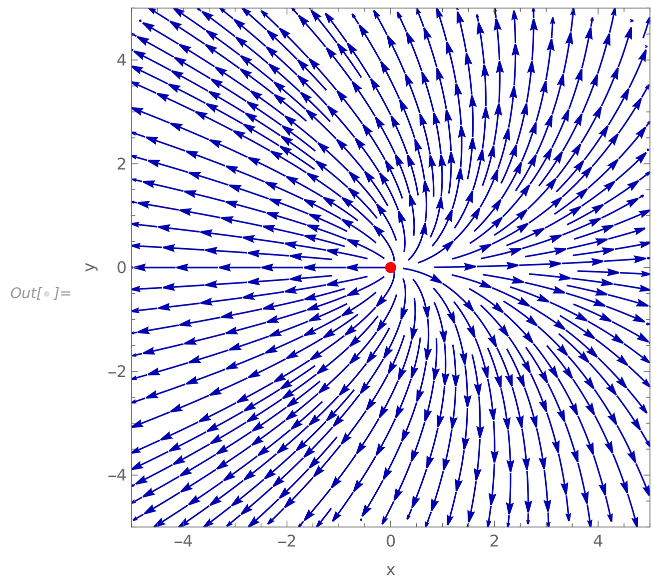

Figure 2: Este es el caso de una velocidad en la dirección $\hat{x}$, que tiene un valor $v/c = 0.5$.

Interpretación

El gráfico muestra cómo el campo eléctrico $\mathbf{E}$ de una carga en movimiento se deforma debido al efecto relativista:

- La mayor densidad de líneas de campo en la dirección perpendicular al movimiento indica un campo eléctrico más fuerte en esta dirección.
- La menor densidad en la dirección de movimiento sugiere un campo más débil en esa dirección.
- Este patrón se interpreta como una contracción de las líneas de campo en la dirección perpendicular, un efecto que es característico de la relatividad.

Una pregunta que naturalmente surge es: este resultado de las líneas de campo, no contradice la ley de transformación del campo eléctrico $\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}$?.

La respuesta es que no. Porque nos estaríamos olvidando de las contracciones de longitudes. Quiero decir, debe cumplirse que en cualquier punto $p(vt, \vec{R})$, $\mathbf{E}_{\parallel}(p) = \mathbf{E}'_{\parallel}(p)$. O sea, deben compararse los mismos puntos del espacio.

Para un punto fijo x_0 el campo "estático" es

$$E(x_0) = q\frac{x'_0}{|x'_0|^3} \tag{12}$$

como $x'_0 = \gamma(x_0 - vt)$, entonces $x_0 = x'_0/\gamma + vt$, y por lo tanto, el campo "dinámico es

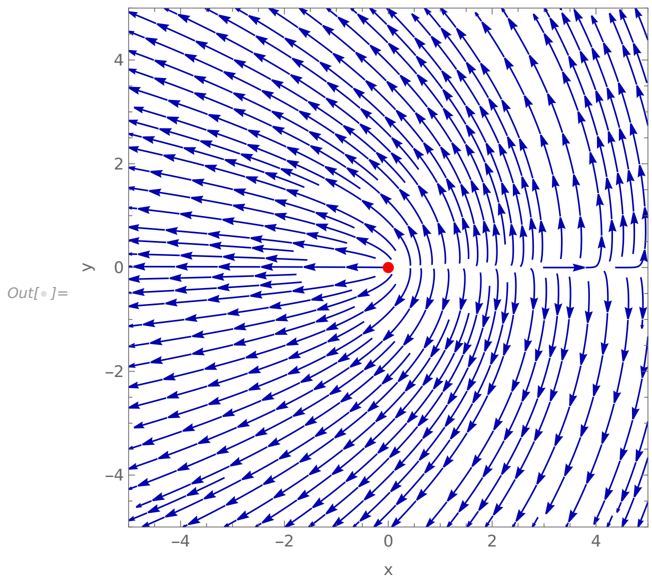

Figure 3: Este es el caso de una velocidad **ultrarelativista** en la dirección $\hat{x}$, que tiene un valor $v/c = 0.9$.

$$E(x_0) = \frac{q}{\gamma^2}\frac{x_0'}{\gamma|x_0'|^3}\gamma^3 = q\frac{x_0'}{|x_0'|^3} \tag{13}$$

entonces, no hay contradicción alguna y el efecto es sólamente debido a que el espacio se contrae en la dirección del movimiento de la carga.