Leyes de conservación en forma covariante

Hemos visto en clases pasadas que el teorema de Poynting (conservación de la energía) se expresa de la siguiente manera, definiento:

La densidad de energía u (en vacío):

$$u = \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right),$$

donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico y $\mathbf{B}$ es el campo magnético y el vector de Poynting $\mathbf{S}$ se define como:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

que representa el flujo de energía electromagnética por unidad de área.

Teorema de Poynting

La forma local del teorema de Poynting se expresa como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E},$$

donde:

- $\frac{\partial u}{\partial t}$ es la tasa de cambio de la densidad de energía en el tiempo.
- $\nabla \cdot \mathbf{S}$ es la divergencia del vector de Poynting, que representa la energía que entra o sale de un volumen dado.
- $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ es el término que indica la potencia consumida por las corrientes eléctricas en el sistema.

Interpretación Física

1. **Conservación de la Energía**: La ecuación muestra que el cambio en la densidad de energía en un volumen se debe al flujo de energía que entra o sale de ese volumen, así como al trabajo realizado sobre las cargas por las corrientes.
2. **Flujo de Energía**: El vector de Poynting indica la dirección y la cantidad de energía electromagnética que fluye a través de una superficie.

Conservación del momento lineal

También hemos visto que el momento lineal satisface la siguiente ley de conservación (para la componente i del momento):

$$-\frac{\partial g_i}{\partial t} + \partial_j T^{ij} = \left(\rho\mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B}\right)_i$$

donde $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$ es la densidad de impulso lineal electromagnética y el Tensor de Maxwell está dado por:

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right)\delta_{ij}\right]$$

Ahora, para tener una expresión covariante de los teoremas de conservación, queremos "armar" una forma tensorial (cuadrática en el tensor intensidad de campo $F_{\mu\nu}$) que tenga como parte espacial (en el bloque de 3x3) al T_{ij}.

Tensor de Energía-Momento

El tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ para un campo electromagnético libre (sin cargas ni corrientes) se expresa como:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right),$$

donde:

- $F^{\mu\nu}$ es el tensor intensidad de campo electromagnético, que describe las componentes del campo eléctrico y magnético.
- $\eta^{\mu\nu}$ es el tensor métrico, que en coordenadas Minkowskianas, que por convensión tomamos como $\mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Componentes del Tensor

1. **Densidad de energía**: La densidad de energía u del campo electromagnético está dada por:

$$u = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right).$$

y ocupa la "posición 00" del tensor.

2. **Componentes del Tensor**: Las componentes del tensor $T^{\mu\nu}$ son:

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right), \quad T^0_i = \frac{S_i}{c},$$

$$T^i_0 = -\frac{S_i}{c},$$

3. **El bloque de 3x3, T^j_i está dado por el Tensor de Maxwell.

Interpretación

Este tensor encapsula la densidad de energía, el flujo de momento y la interacción entre el campo eléctrico y magnético. La forma del tensor refleja cómo el campo electromagnético transporta energía y momento a través del espacio.

Tensor de Maxwell

El tensor de Maxwell $F^{\mu\nu}$ se puede representar en forma matricial como sigue:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

donde E_i son las componentes del campo eléctrico y B_i son las componentes del campo magnético.

Tensor de Energía-Momento en forma matricial

El tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ para un campo electromagnético libre se expresa en forma matricial como:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) & \frac{1}{4\pi c}S_x & \frac{1}{4\pi c}S_y & \frac{1}{4\pi c}S_z \\ \frac{1}{4\pi c}S_x & -\frac{1}{4\pi}B^2 & -\frac{1}{4\pi}E_zB_y & -\frac{1}{4\pi}E_yB_z \\ \frac{1}{4\pi c}S_y & -\frac{1}{4\pi}E_zB_x & -\frac{1}{4\pi}B^2 & -\frac{1}{4\pi}E_xB_z \\ \frac{1}{4\pi c}S_z & -\frac{1}{4\pi}E_yB_x & -\frac{1}{4\pi}E_xB_y & -\frac{1}{4\pi}E^2 \end{pmatrix},$$

Quiero calcular la derivada covariante del Tensor de Energía-Momento $\partial_\mu T^{\mu\nu}$, donde el Tensor está dado por:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right),$$

Calculamos la derivada covariante:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left(\partial_\mu(F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha}) - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})\right).$$

Usando la regla del producto en el primer término:

$$\partial_\mu(F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha}) = (\partial_\mu F^{\mu\alpha})F^{\nu}{}_{\alpha} + F^{\mu\alpha}(\partial_\mu F^{\nu}{}_{\alpha}).$$

El segundo término involucra la derivada del producto de $F^{\alpha\beta}$:

$$\partial_\mu(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) = 2F^{\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta}.$$

Entonces, tenemos:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left((\partial_\mu F^{\mu\alpha})F^{\nu}{}_{\alpha} + F^{\mu\alpha}(\partial_\mu F^{\nu}{}_{\alpha}) - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta}\right).$$

En el caso del campo electromagnético libre, las ecuaciones de Maxwell son:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

Sustituyendo esto en la expresión anterior, obtenemos:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left(0 \cdot F^{\nu}{}_{\alpha} + F^{\mu\alpha}(\partial_\mu F^{\nu}{}_{\alpha}) - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta}\right).$$

Por lo tanto, en el caso del campo electromagnético libre, se tiene:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}(\partial_\mu F^{\nu}{}_{\alpha}) - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta}\right).$$

En presencia de fuentes, sabemos que las ecuaciones de Maxwell surgen de

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}J^\nu \tag{1}$$

por lo tanto, el primer término en la derivada del tensor $T^{\mu\nu}$ debe contemplar las ecuaciones no-homogéneas de Maxwell, es decir:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{c}J^\alpha F^{\nu}{}_{\alpha} - F^{\alpha\beta}\left(\partial_\beta F^{\nu}{}_{\alpha} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu F_{\alpha\beta}\right)\right)$$

Por lo tanto, la derivada puede escribirse como:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{J^\alpha F^{\nu}{}_{\alpha}}{c} + \frac{1}{4\pi}F^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu F_{\mu\alpha} + \frac{1}{2}\partial_\mu F_{\alpha\beta}\right)$$

de donde podemos ver que el último paréntesis es nulo debido a que es simétrico en α y β.

Finalmmente, y usando las ecuaciones de Maxwell, obtenemos:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{J^\alpha F^{\nu}_{\alpha}}{c} = -f^\nu$$

donde llamaremos a f^ν el cuadrivector fuerza.

Las componentes de esta fuerza son:

$$f^0 = \frac{\mathbf{J}.\mathbf{E}}{c}$$

y

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B}$$

La segunda ley de Newton en forma clásica es:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a},$$

donde $\mathbf{f}$ es la fuerza, m es la masa y $\mathbf{a}$ es la aceleración.

En relatividad, podemos escribir una forma análoga utilizando la cuadri-aceleración a^μ y el cuatro-momento p^μ:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu,$$

donde:

- $p^\mu = mu^\mu$ es el cuatro-momento de la partícula.
- f^μ es la fuerza en forma covariante.
- τ es el tiempo propio de la partícula.
- u^μ es la cuatro-velocidad de la partícula.

La cuadri-aceleración a^μ se define como:

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}.$$

Entonces, la expresión de la segunda ley de Newton en términos de la cuadri-aceleración se puede reescribir como:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu \quad \text{o} \quad \frac{d}{d\tau}(mu^\mu) = f^\mu.$$

Por lo tanto, la forma relativista de la segunda ley de Newton se relaciona directamente con la cuadri-aceleración y se puede expresar como:

$$f^\mu = ma^\mu.$$

Las ecuaciones de movimiento covariantes para una partícula con carga q y momento p^μ en un campo electromagnético descrito por el tensor de Maxwell $F^{\mu\nu}$ se pueden escribir como:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}u_\nu,$$

donde $F^{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético.

En términos de componentes, esta ecuación se puede escribir como:

$$\frac{dp^0}{d\tau} = q\left(F^{0i}u_i\right),$$

y

$$\frac{dp^i}{d\tau} = q\left(F^{ij}u_j\right),$$

donde $i, j = 1, 2, 3$ representan las componentes espaciales.