FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2024

GUÍA 5 - ONDAS PLANAS

Problema 6: Reflexión y transmisión en un buen conductor - los ejercicios propuestos

En la resolución del problema 6 de la guía de ondas teníamos soluciones de ondas planas en el interior del conductor que en nuestro planteo ocupa la región del semi–espacio infinito con $z < 0$. Para el campo eléctrico en el caso TE obtuvimos la parte real de:

$$\mathbf{E} = E\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{x} = |E|\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\phi)}\,\hat{x}\,,$$

en donde $|E|$ y ϕ se asumen conocidos a partir del coeficiente de transmisión T que obtuvimos en clase: $E = |E|\, e^{i\phi} = T\, E_0$. Además:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_f + i\,\mathbf{k}_a \qquad \begin{array}{l} \mathbf{k}_f = k_y\,\hat{y} + k'\,\hat{z} : \text{ asociado a la velocidad de fase y propagación} \\ \mathbf{k}_a = k''\,\hat{z} : \text{ asociado a la atenuación} \end{array}$$

esto es,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E\, e^{-\mathbf{k}_a\cdot\mathbf{r}}\, e^{i(\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\hat{x} \\ &= E\, e^{-z\,k''} e^{i(y\,k_0\sin\theta + z\,k' - \omega t)}\,\hat{x}\,; \end{aligned}$$

Bajo la aproximación de buen conductor quedó:

- $k' \simeq -\delta^{-1} = -\frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c}$ es la parte real de la componente k_z y determina que la velocidad de fase en esa dirección sea en sentido de $-\hat{z}$, es decir, hacia el interior del conductor.

- $k'' \simeq -\delta^{-1}$ produce una atenuación del campo hacia los z negativos en una longitud característica δ. Las superficies de amplitud constante quedan dadas por: $zk'' = cte$, esto es; los planos de amplitud constante son paralelos a la interfase.

- Las superficies de fase constante del campo eléctrico son los planos: $y\,k_o\sin\theta + z\,k' = cte$. La dirección de propagación es perpendicular a los planos de fase constante y el ángulo de refracción *real* ψ de la onda transmitida respecto a la normal a la interfase $\hat{\perp} = \hat{z}$, puede definirse a partir de

$$\sin\psi = \frac{k_y}{(k_y^2 + k'^2)^{1/2}} \simeq \delta k_0 \sin\theta\,.$$

Observar que en un conductor ideal $\delta \to 0$ y entonces no hay onda transmitida (el módulo del coeficiente de transmisión es $|T| \approx |(1-i)\delta k_0\cos\theta| = \sqrt{2}\,\delta k_0\cos\theta \to 0$): Los campos no se propagan al interior del conductor, el campo eléctrico exterior justo sobre el conductor puede ser a lo sumo normal y se produce una corriente superficial sobre la interfase (debido a que el espesor pelicular δ tiende a cero) encargada de conservar la componente tangencial de $\mathbf{H}$ sobre la interfase. Esta corriente en superficie debe ser introducida a mano para que las ecuaciones dinámicas sobre la interfase sean consistentes.

Habíamos dejado los siguientes ejercicios propuestos:

1) Mostrar que los campos reales dentro del conductor $\mathbb{R}\mathrm{e}[\mathbf{E}]$ y $\mathbb{R}\mathrm{e}[\mathbf{B}]$ no forman terna derecha con $\mathbf{k}_f$, donde $\mathbf{k}_f$ está asociado a la velocidad de fase.

El campo eléctrico en el caso TE queda:

$$\mathbb{R}\mathrm{e}[\mathbf{E}] = |E|\, e^{-k''z}\, \cos\left(\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi\right) \hat{x}$$

El campo magnético es $\mathbb{R}\mathrm{e}[\mathbf{B}] = \frac{c}{\omega}\,\mathbb{R}\mathrm{e}[\mathbf{k} \times \mathbf{E}]$:

$$\mathbb{R}\mathrm{e}[\mathbf{B}] = -\frac{c}{\omega}\,|E|\, e^{z/\delta} \left\{ \frac{1}{\delta}\, \left[\cos\left(\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi\right) - \sin\left(\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi\right)\right] \hat{y} + k_y \cos\left(\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi\right)\hat{z}) \right\}$$

de donde se puede ver que no forman terna con $\mathbf{k}_f = k_y\hat{y} - \delta^{-1}\hat{z}$.

2) Calcular el vector de Poynting $\mathbf{S}$ dentro del conductor: ¿En qué dirección se propaga la energía instantánea trasmitida?

Aquí se puede operar con los campos reales del ítem anterior para obtener $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbb{R}\mathrm{e}[\mathbf{E}] \times \mathbb{R}\mathrm{e}[\mathbf{H}]$:

$$\mathbf{S} = \frac{c^2}{4\pi\omega}\,|E|^2\, e^{2z/\delta}\, \cos^2\left(\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi\right) \left\{ k_y\,\hat{y} + \delta^{-1}\, \left[1 - \tan\left(\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi\right)\right] \hat{z} \right\}$$

De donde se ve que el flujo de energía tiene una dirección variable a casa instante, que se repite con periodicidad $\tau = 2\pi/\omega$. Notar que la terna derecha de los campos eléctrico y magnético (reales) de una onda plana es el vector de Poynting; es decir, la dirección de propagación instantánea de la energía electromagnética de la onda.

3) Calcular el promedio temporal (en un período) $< \mathbf{S} >$. ¿En qué dirección viaja la energía promediada?

Al tomar el promedio temporal en un período τ desde la expresión anterior se obtiene:

$$< \mathbf{S} > = \frac{c^2}{4\pi\omega}\,\frac{|E|^2}{2}\, e^{2z/\delta}\,\mathbf{k}_f$$

esto indica que, en promedio, la energía se propaga en la dirección de $\mathbf{k}_f$.

4) Estudiar el balance de energía promedio dentro del conductor: Tomar una columna de área unidad que se extiende desde la superficie del conductor hasta una distancia $z = -d$ dentro de él, usando la aproximación de buen conductor. Esto involucra el cálculo del vector de Poynting y el de la energía disipada por efecto Joule dentro del conductor:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathrm{V}} d^3r\; u\right) + \oint_{\partial\mathrm{V}} d^2r\; \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = -\int_{\mathrm{V}} d^3r\; \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

donde

$$u = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

(El volumen V sería un cilindro de sección unidad A y de longitud $-z = d$).

Para chequear el balance de energía promediado calculamos cada término del Teorema de Poynting. El primero es:

$$< \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathrm{V}} d^3r\ u\right) > = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} dt\,\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathrm{V}} d^3r\ u\right) = \frac{1}{\tau}\,\left(\int_{\mathrm{V}} d^3r\ u\right)\Big|_0^{\tau} = 0\,,$$

en donde en la última igualdad se usa que la energía electromagnética, que es proporciona al cuadrado de los campos, es periódica en $\tau/2$. No hay variación temporal del promedio de la energía en un problema estacionario. Lo que queda por chequear es que el flujo de energía sobre el borde del volumen es igual al negativo de la energía disipada por efecto Joule en las corrientes dentro del mismo volumen V. El flujo del Poynting es:

$$\oint_{\partial \mathrm{V}} d^2r\ \mathbf{n}\cdot < \mathbf{S} > = A\,\hat{z}\cdot(< \mathbf{S} >|_{z=0^-} - < \mathbf{S} >|_{z=-d})$$

en donde se tomó el flujo del promedio del vector de Poynting sobre el borde del volumen V (el aporte lateral se cancela porque todo lo que entra es lo mismo que lo que sale, y queda la contribución de las tapas en $z = 0$ y $z = -d$). Evaluando se obtiene:

$$\oint_{\partial \mathrm{V}} d^2r\ \mathbf{n}\cdot < \mathbf{S} > = -A\,\frac{c^2}{4\pi\delta\omega}\frac{|E|^2}{2}\left(1 - e^{-2d/\delta}\right)\ ,$$

esto es un flujo negativo hacia afuera del volumen V, es decir un flujo positivo hacia adentro: entra mas energía (en $z = 0$) que la que sale (en $z = -d$). El balance de energía exige que la energía que ingresa al volumen V se consuma en las corrientes ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$) que existen dentro del volumen V del conductor. Queda para ustedes verificar que el término de Joule se encarga de satisfacer la igualdad del balance.

Dado que les quedan esencialmente resueltos todos los ejercicios propuestos, les dejo recomendados los problemas de reflexión total interna y reflexión total interna frustrada de la guía de ondas planas. La resolución es análoga a los problemas 1 y 2 de la guía, respectivamente, lo interesante es que hagan el análisis del flujo del vector de Poynting en el medio de la transmisión.

Por otro lado, en la última clase me han consultado por el problema de reflexión total externa (problema 8). Para plantear este problema (que aparece con asterisco en la guía de ondas) tienen que proponer un modelo para la dinámica de los electrones dentro del metal. Para resolverlo pueden consultar en el Jackson 2da Edición, Sección 7.8., o Jackson 3ra Edición, Sección 7.5 - C.