

FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2024

SEGUNDO PARCIAL

Instructivo y recomendaciones:

- Justifique todos los pasos de sus cuentas, razonamientos y resultados.
- Si estuviera especificado, ubicar el sistema de coordenadas según indica el enunciado, o la figura.

- 1.
- 2.
- 3.

Fórmulas útiles:

- Definiciones y relaciones constitutivas para M.L.I.H.:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} & \mathbf{D} &= (1 + 4\pi \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M} & \mathbf{B} &= (1 + 4\pi \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \end{aligned}$$

- Ecuaciones de Maxwell y las condiciones que se obtienen sobre una interfase:

[$\hat{\mathbf{n}}$ normal unitaria apuntando desde el medio (1) hacia el (2)]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho_\ell \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi \sigma_\ell \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\ell + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_\ell \quad (4)$$

- Balance de energía promediado:

$$\left\langle \frac{d}{dt} \left(\int_V d^3r u \right) \right\rangle + \left\langle \int_V d^3r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \right\rangle = - \left\langle \oint_{A=\partial V} d^2r \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \right\rangle \quad (5)$$

dónde la densidad de energía es $u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$.

- Dados $A(t) = \text{Re}[Ae^{-i\omega t}]$ y $B(t) = \text{Re}[Be^{-i\omega t}]$, el promedio temporal en un número entero de períodos $T = 2\pi/\omega$ es

$$\langle AB \rangle \equiv \langle AB \rangle_T = \frac{1}{2} \text{Re}[A \mathbb{B}^*] \quad (6)$$

- Algunos cuadvectores y cuadritensores conocidos:

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}) \quad \partial_\mu = (\partial_t/c, \nabla) \quad k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$$

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{j}) \quad A^\mu = (\Phi, \mathbf{A}) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

- Boost de un cuadrivector: $C'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} C^{\nu}$, con $C^{\mu} = (C^0, \vec{C})$:

$$C'^0 = \gamma(C^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{C}_{\parallel}) \quad (7)$$

$$\vec{C}'_{\parallel} = \gamma(\vec{C}_{\parallel} - \vec{\beta} C^0) \quad (8)$$

$$\vec{C}'_{\perp} = \vec{C}_{\perp} \quad (9)$$

donde \parallel es la componente paralela a la velocidad $\vec{\beta}$ del boost y $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

- Transformación de los campos:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_{\perp}) \quad (10)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{\perp}) \quad (11)$$

- Algunos invariantes:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2(E^2 - B^2) \quad (12)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \quad (13)$$

$$F_{\mu}^{\mu} = 0 \quad (14)$$

- La potencia por unidad de ángulo sólido en un punto \mathbf{r} a tiempo t radiada por una carga en movimiento arbitrario:

$$\frac{dP}{d\Omega} \equiv I(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{S}(\mathbf{r}, t') \cdot R^2 \mathbf{n}]_{t'=t_{ret}}, \quad \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (15)$$

- Una primitiva:

$$\int dx \sin^2 x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) \quad (16)$$

- Expresiones del desarrollo de un campo bajo ciertas hipótesis:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{r}}{c^2 r} \times [\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}} + \ddot{\mathbf{m}} + \frac{1}{6c} \hat{r} \times \ddot{\mathbf{Q}}]_{t_{ret}} + \mathcal{O}[(1/\lambda)^4] \quad (17)$$

$$\mathbf{p} = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}', t) \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{p} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}(t)$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int d^3 r' \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \rightarrow \mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}(t) \times q_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}(t)$$

$$\mathbf{Q} = \bar{\bar{Q}} \cdot \hat{r}$$

$$[\bar{\bar{Q}}]_{ij} = \int d^3 r' (3r'_i r'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}', t) \rightarrow [\bar{\bar{Q}}]_{ij} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} (3r_{\alpha i}(t) r_{\alpha j}(t) - \delta_{ij} r_{\alpha}^2)$$

- algunas desarrollos a primer orden no nulo:

$$\sin x = x + \mathcal{O}[x^3] \quad \cos x = 1 + \mathcal{O}[x^2] \quad (18)$$

- Conservación de la carga (ec. de continuidad):

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (19)$$