FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2024

RECUPERATORIO DEL PRIMER PARCIAL 02/12

Instructivo y recomendaciones:

- Justifique todos los pasos de sus cuentas, razonamientos y resultados.
- Si estuviera especificado, ubicar el sistema de coordenadas según indica el enunciado, o la figura.
- Para plantear un problema usando separación de variables no es necesario demostrar el método, ni el origen de las soluciones a las ecuaciones diferenciales que surgen del método. Sí es necesario justificar la elección de las funciones que utiliza para construir el desarrollo en términos de las bases que requiere y las condiciones de contorno.

1. Dada $G(\mathbf{r};\mathbf{r}')$ la función de Green tipo Dirichlet de ...

   (a) $[1.5\,\text{Pts.}]$ Indicar cuál ...

   Justificar mostrando que su elección satisface las condiciones de contorno correspondientes mediante el método de imágenes y usando argumentos de simetría.

   Figura del problema 1

   (b) $[5.5\,\text{Pts.}]$ Calcular el potencial electrostático $\Phi(\mathbf{r})$ en el interior del recinto del ítem (a) si se ubica un ...

   Mostrar que el resultado es Real y tiene las unidades correctas.

   (c) $[1\,\text{Pts.}]$ ¿Cuál de las ...? Justificar.

2. Una esfera ...

(a) $[8.5\,\text{Pts.}]$ Calcular el potencial electrostático $\Phi(\mathbf{r})$ en todo el espacio.

(b) $[1.5\,\text{Pts.}]$ ¿Cuánto vale la carga ... ? Justificar la elección.

3. Un imán permanente ...

(a) $[6.5\,\text{Pts.}]$ Hallar las fuentes de cada uno de los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$, y calcularlos para todo punto del espacio. El resultado puede quedar escrito en términos de un potencial.

(b) $[0.5\,\text{Pts.}]$ Indicar el valor del momento dipolar magnético ...

Figura del problema 3

Fórmulas útiles:

A. **Reglas de transformación de un potencial escalar $\Phi(\mathbf{r})$ ante la transformación de sus fuentes:**

Traslación $\mathbf{a}$: $\Phi'(\mathbf{r}) = T(\mathbf{a})\,[\Phi(\mathbf{r})] = \Phi(\mathbf{r}-\mathbf{a})$
Rotación de ángulo α entorno al eje z: $\Phi'(\mathbf{r}) = R_z(\alpha)\,[\Phi(\rho,\varphi,z)] = \Phi(\rho,\varphi-\alpha,z)$
Paridad en x (reflexión plano $x=0$): $\Phi'(\mathbf{r}) = P_x\,[\Phi(x,y,z)] = \Phi(-x,y,z)$

B. **Ecuaciones de Maxwell (estáticas) en medios materiales**

$\nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\,\rho_\ell \qquad \nabla\times\mathbf{E} = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \nabla\times\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_\ell$

C. **Definiciones y relaciones constitutivas para M.L.I.H.:**

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\,\mathbf{P} \qquad \mathbf{D} = (1+4\pi\,\chi_e)\,\mathbf{E} = \epsilon\,\mathbf{E}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\,\mathbf{M} \qquad \mathbf{B} = (1+4\pi\,\chi_m)\,\mathbf{H} = \mu\,\mathbf{H}$$

D. **Algunas condiciones de salto** [$\hat{\mathbf{n}}$ normal desde el medio (1) hacia el (2)]

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}} &= 0 \qquad \hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1) = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{g}_t \\
(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}} &= 4\pi\,\sigma_m \qquad \hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{g}_\ell \\
(\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}} &= -\,\sigma_m \qquad \hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1) = \frac{1}{c}\,\mathbf{g}_m
\end{aligned}$$

E. **momentos multipolares**: $\mathbf{p} = \int d^3r'\,\mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}')$ $\qquad$ $\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\int d^3r'\,\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(\mathbf{r}')$

$$[\bar{\bar{Q}}]_{ij} = \int d^3r'\,(3r_i'r_j' - \delta_{ij}r'^2)\rho(\mathbf{r}')$$

F. **Funciones de Green tipo Dirichlet**

$$G_D(\mathbf{r};\mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y\, \frac{e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}|z-z'|}}{2\pi\sqrt{k_x^2+k_y^2}} e^{i\,k_x(x-x')}e^{i\,k_y(y-y')}\,, \quad \mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$$

$$G_D(\mathbf{r};\mathbf{r}') = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos[\nu(\varphi-\varphi')]}{(1+\delta_{\nu,0})}\int_0^\infty dk\,J_\nu(k\rho)J_\nu(k\rho')\,e^{-k|z-z'|}\,, \quad \mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$$

$$G_D(\mathbf{r};\mathbf{r}') = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos[\nu(\varphi-\varphi')]}{(1+\delta_{\nu,0})}\int_0^\infty dk\,\cos[k(z-z')]\,I_\nu(k\rho_<)K_\nu(k\rho_>)\,, \quad \mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$$

$$G_D(\mathbf{r};\mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\,Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)\,, \quad \mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$$

$$G_D(\mathbf{r};\mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\left(-\frac{r_>^l}{R^l}+\frac{R^{l+1}}{r_>^{l+1}}\right)\frac{r_<^l}{R^{l+1}}\,Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) \;\;;\;\; r<R$$

$$G_D(\mathbf{r};\mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\left(\frac{r_<^l}{R^l}-\frac{R^{l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\frac{R^l}{r_>^{l+1}}\,Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) \;\;;\;\; r>R$$

G. **Coordenadas cartesianas**

i. Ortogonalidad (trigonométricas):

$$\int_0^a dx\,\sin(k_{n'}x)\sin(k_nx) = \frac{a}{2}\delta_{nn'}\,, \quad k_n = n\pi/a$$

$$\int_0^{+\infty} dx\,\sin(k'x)\sin(kx) = \frac{\pi}{2}\,\delta(k-k')\,, \quad k>0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\sin(k'x)\sin(kx) = \pi\,\delta(k-k')\,, \quad k>0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\cos(k'x)\cos(kx) = \pi\,\delta(k-k')\,, \quad k>0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,e^{i(k-k')x} = 2\pi\delta(k-k')\,, \quad k\in\mathbb{R}$$

ii. **Coordenadas cilíndricas**

i. Ortogonalidad de las funciones de Bessel J_ν:

$$\int_0^a d\rho\, \rho\, J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a) J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) = \frac{a^2}{2}\left(J_{|\nu|+1}(x_{\nu n})\right)^2 \delta_{nn'}$$
$$\int_0^\infty d\rho\, \rho\, J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \frac{\delta(k-k')}{k}$$

ii. Propiedades: $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu\, J_\nu(x) \qquad \int dx\, x^\nu\, J_{\nu-1}(x) = x^\nu\, J_\nu(x)$

iii. Wronskiano: $W[K_\nu, I_\nu](x) \equiv K_\nu(x) I'_\nu(x) - K'_\nu(x) I_\nu(x) = \frac{1}{x}$

iv. Ortogonalidad y completitud:

$$\delta(z-z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(z-z')} \qquad \delta(k-k') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{iz(k-k')}$$

$$\delta_{m,n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i(m-n)\varphi} \qquad \delta(\varphi-\varphi') = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in Z} e^{im(\varphi-\varphi')}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, \cos(\nu\varphi)\cos(\nu'\varphi) = \pi\, \delta_{\nu,\nu'}(1+\delta_{\nu,0}) \quad (\nu,\nu' \in \mathbb{N}_0)$$
$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, \sin(\nu\varphi)\sin(\nu'\varphi) = \pi\, \delta_{\nu,\nu'} \quad (\nu,\nu' \in \mathbb{N})$$

iii. **Coordenadas esféricas**

i. Armónicos esféricos: $\quad Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$

ii. Funciones asociadas de Legendre: $\quad P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (m \geqslant 0)$

iii. Polinomios de Legendre: $\quad P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$

iv. Ortogonalidad: ($x = \cos\theta$)

$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta)\, d\theta\, Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi) Y_{lm}(\theta,\varphi) = \delta_{l'l}\delta_{m'm} \qquad \int_{-1}^1 dx\, P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{l'l}$

$\int_{-1}^1 dx\, P_{l'm}(x) P_{lm}(x) = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{l'l} \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{im\varphi} e^{-im'\varphi} = 2\pi\delta_{m'm}$

v. Propiedades:

$$Y_{l,-m}(\theta,\varphi) = (-1)^m Y^*_{lm}(\theta,\varphi) \qquad P_l^{-m}(x) = (-1)^m \tfrac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

vi. Valores particulares:

$$P_l(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ l \ \text{ es impar} \\ \frac{(-1)^{l/2}(l-1)!!}{2^{l/2}\left(\frac{l}{2}\right)!} & \text{si } \ l \ \text{ es par} \end{cases} \quad ; \quad P_l(1) = 1$$