Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2013
Guía 1: Estados cuánticos, operadores, espectros discretos y contínuos

1. (a) Pruebe las siguientes identidades

$$\begin{aligned} 0 &= [A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] \quad \text{(identidad de Jacobi)} \\ [A,B+C] &= [A,B] + [A,C] \\ [A,BC] &= [A,B]C + B[A,C] \\ [AB,CD] &= -AC\{D,B\} + A\{C,B\}D - C\{D,A\}B + \{C,A\}DB\ , \end{aligned}$$

donde $\{A,B\} = AB + BA$ es el anticonmutador.

(b) Suponga que A y B son tales que conmutan con su conmutador $[A,B]$. Verifique entonces que $[A,B^n] = nB^{n-1}[A,B]$.

(c) Dado un operador A, se define formalmente la exponencial de A como

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n\ .$$

Compruebe que si A y B están en las condiciones del punto anterior, entonces

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2}\ .$$

¡Note que $e^A e^B \neq e^{A+B}$!

2. En un espacio vectorial de dimension 2 considere los operadores $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, que en la base ortonormal $\{|+\rangle\,, |-\rangle\}$ con

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,$$

se representan mediante las matrices

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Estas tres matrices se conocen como *matrices de Pauli*.

(a) ¿Son hermíticas estas matrices? Halle sus autovalores y autovectores en esta base.

(b) Verifique que se satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} det(\sigma_k) &= -1 \\ Tr(\sigma_k) &= 0 \\ \sigma_i^2 &= I \\ \sigma_j\sigma_k &= i\epsilon_{jkl}\sigma_l + I\delta_{jk}\ , \end{aligned}$$

donde I representa a la matriz identidad, $k = 1,2,3$ ($\equiv x,y,z$), ϵ_{ijk} es la densidad tensorial de Levi-Civita, y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

3. Suponga una matriz de 2×2 X que se escribe en la forma

$$X = a_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$$

donde a_0 y $a_{1,2,3}$ son números, y $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

   (a) ¿Cómo se relacionan los a_k ($k = 0, 1, 2, 3$) con $\mathrm{Tr}(X)$ y $\mathrm{Tr}\ (\sigma_k X)$?

   (b) Obtenga a_0 y a_k en término de los elementos de matriz X_{ij}. Muestre que cualquier matriz hermítica de 2×2 X se puede escribir en esta forma.

4. Suponga que $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$ son dos bases ortogonales.

   (a) Considere $|u\rangle = |\alpha\rangle - i\,|\beta\rangle$ y $|v\rangle = i\,|\alpha\rangle + |\beta\rangle$. ¿Cuánto vale $\langle u|v\rangle$? ¿Son ortogonales?

   (b) Sea $|k\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{ki}\,|i\rangle$, con $k = \alpha, \beta, \gamma$. ¿Cuánto valen $\langle 2|\beta\rangle$ y $\langle \alpha|3\rangle$?

   (c) Escriba $|u\rangle$ y $|v\rangle$ en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y calcule nuevamente $\langle u|v\rangle$.

5. Usando las reglas del álgebra de bra-ket, pruebe o evalúe los siguientes items:

   (a) $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$ y $\mathrm{Tr}(XYZ) = \mathrm{Tr}(ZXY)$, donde X,Y y Z son operadores.

   (b) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

   (c) Calcule $\exp[i\mathrm{f(A)}]$ en forma de ket-bra, donde A es un operador hermítico cuyos autovalores son conocidos.

6. (a) Considere dos kets $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$. Suponga que $\langle a'|\alpha\rangle, \langle a''|\alpha\rangle, \ldots$ y $\langle a'|\beta\rangle, \langle a''|\beta\rangle, \ldots$ son todos conocidos, donde $|a'\rangle, |a''\rangle, \ldots$ forman un conjunto completo de kets base. Encuentre la representación matricial del operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en esta base.

   (b) Considere ahora un sistema de espín $1/2$ y sean $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ iguales a $|s_z = \hbar/2\rangle$ y $|s_x = \hbar/2\rangle$ respectivamente. Escriba explicitamente la matriz cuadrada que corresponde a $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en la base usual (s_z diagonal).

7. Suponga que $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son autoestados de algún operador hermítico A. ¿Bajo qué condiciones se puede concluir que $|i\rangle + |j\rangle$ también es autoestado de A? Justifique.

8. Considere un espacio de kets generado por los autokets $\{|a'\rangle\}$ de un operador hermítico A. No hay degeneración.

   (a) Pruebe que

$$\prod_{a'} (A - a')$$

   es el operador nulo.

   (b) ¿Cuál es el significado del operador

$$\prod_{a'' \neq a'} \frac{(A - a'')}{(a' - a'')} \quad ?$$

   (c) Ilustre los dos puntos anteriores usando $A = S_z$ de un sistema de espín $1/2$.

9. Usando la ortonormalidad de $|+\rangle$ y $|-\rangle$, pruebe que

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k \qquad \{S_i, S_j\} = (\hbar^2/2)\delta_{ij}$$

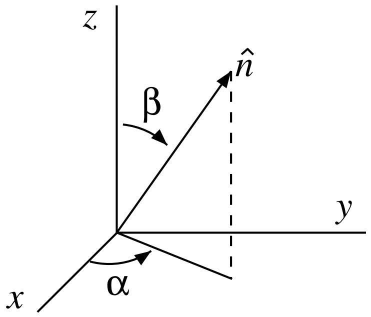
donde

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right] \\ S_y &= \frac{i\hbar}{2}\left[-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right] \\ S_z &= \frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right] \ . \end{aligned}$$

10. Construya $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$ tal que

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ está caracterizado por los ángulos que se muestran en la figura. Exprese su respuesta como una combinación lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$.



[Nota: la respuesta es

$$\cos(\beta/2)\,|+\rangle + \sin(\beta/2)e^{i\alpha}\,|-\rangle \ .$$

En lugar de verificar que esta respuesta satisface la ecuación de autovalores de arriba, considere al problema como un problema de autovalores.]

11. El hamiltoniano de un sistema de dos niveles es

$$H = a\left(|1\rangle\langle1| - |2\rangle\langle2| + |1\rangle\langle2| + |2\rangle\langle1|\right)$$

donde a es un número con dimensiones de energía. Encuentre los autovalores de energía y los correspondientes autoestados como una combinación lineal de $|1\rangle$ y $|2\rangle$.

12. Un sistema de dos niveles está caracterizado por el hamiltoniano

$$H = H_{11}\,|1\rangle\langle1| + H_{22}\,|2\rangle\langle2| + H_{12}\left(|1\rangle\langle2| + |2\rangle\langle1|\right)$$

donde H_{11}, H_{22}, H_{12} son números reales con dimensiones de energía y $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son autoestados de algún observable(distinto de H). Encuentre los autoestados de energía y los correspondientes autovalores. Asegurese de que su respuesta tenga sentido en el caso $H_{12} = 0$ (no necesita resolver el problema desde cero; use el resultado del ejercicio 10).

13. Un sistema de espín $1/2$ está en un autoestado de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ con autovalor $\hbar/2$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo γ con el eje positivo z.

   (a) Suponga que se mide S_x. ¿Cuál es la probabilidad de obtener $\hbar/2$?

   (b) Evalúe la dispersión de S_x, es decir $\langle(S_x - \langle S_x\rangle)^2\rangle$. Verifique el resultado para los casos $\gamma = 0, \pi/2, \pi$.

14. Un haz de átomos de espín $1/2$ es sometido a una serie de mediciones del tipo Stern-Gerlach en la siguiente manera:

    (a) La primera medición acepta átomos con $s_z = \hbar/2$ y rechaza átomos con $s_z = -\hbar/2$.

    (b) La segunda medición acepta átomos con $s_n = \hbar/2$ y rechaza con $s_n = -\hbar/2$, donde s_n es el autovalor del operador $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ con $\hat{\mathbf{n}}$ en el plano xz y formando un ángulo β con el eje z.

    (c) Una tercera medición acepta $s_z = -\hbar/2$ y rechaza $s_z = \hbar/2$.

    ¿Cuál es la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$ si el haz $s_z = \hbar/2$ que pasa la primer medición esta normalizado a uno? Como se debe orientar el segundo aparato de medición para maximizar la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$?

15. Un cierto observable en mecánica cuantica tiene una representación matricial de 3×3 como sigue

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    (a) Encuentre los autovectores normalizados de este observable y los correspondientes autovalores. ¿Hay degeneración?

    (b) De un ejemplo físico donde todo esto sea relevante.

16. Dada la matriz

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

    (a) Pruebe que J es unitaria y halle J^{-1}.

    (b) Aplique la transformación $B = JAJ^{-1}$ a una matriz simétrica y verifique que: (i) B es simétrica, (ii) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

    (c) Dada una matriz A simétrica, halle θ de modo que B resulte ser diagonal.

17. Sean A y B dos observables. Suponga que los autokets simultaneos de A y B $\{|a', b'\rangle\}$ forman un conjunto ortonormal completo de kets base. ¿Se puede siempre concluir que $[A, B] = 0$? Si su respuesta es sí, pruébela. Si es no, de un contraejemplo.

18. Considere un espacio de kets tridimensional. Si un dado conjunto de kets ortonormales, digamos $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$, se usan como kets base, los operadores A y B están representados por

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

    donde a y b son reales.

    (a) Obviamente A tiene un espectro degenerado. ¿También lo tiene B ?

    (b) Muestre que A y B conmutan.

    (c) Encuentre un nuevo conjunto de kets ortonormales que sean autokets simultaneos de A y B. Especifique los autovalores de A y B para cada uno de los tres autokets. ¿La especificación de los autovalores caracteriza completamente a cada autoket?

19. Considere un sistema físico cuyo espacio de estados está desarrollado en la base $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$. En esta base, los operadores H y B están dados por

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mientras que los operadores L y S se definen según

$$L|u\rangle = |u\rangle \quad L|v\rangle = 0 \quad L|w\rangle = -|w\rangle$$
$$S|u\rangle = |w\rangle \quad S|v\rangle = |v\rangle \quad S|w\rangle = |u\rangle$$

(a) Muestre que H y B conmutan. Construya una base de autovectores comunes a ambos.

(b) ¿Cuáles de los conjuntos $\{H\}$,$\{B\}$,$\{H, B\}$,$\{H^2, B\}$ son CCOC?

(c) Escriba las matrices que representan a los operadores L, L^2, S, y S^2 en la base $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$. ¿Son estos operadores observables?

20. Dos operadores hermíticos anticonmutan, es decir que $\{A, B\} = AB + BA = 0$. ¿Es posible tener un autoket común de A y B? Pruebe o ilustre su conclusión.

21. Dos observables A_1 y A_2, que no involucran explicitamente el tiempo, no conmutan ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con el hamiltoniano ($[A_1, H] = [A_2, H] = 0$). Pruebe que los autoestados de energía son, en general, degenerados. ¿Hay excepciones? Como un ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales $H = p^2/2m + V(r)$, con $A_1 \to L_z$ y $A_2 \to L_x$.

22. (a) La manera mas fácil de derivar la desigualdad de Schwarz es la siguiente. Primero observe que

$$(\langle\alpha| + \lambda^* \langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle + \lambda |\beta\rangle) \geq 0$$

para cualquier número complejo λ. Luego, elija λ de tal forma que la desigualdad anterior se reduzca a la desigualdad de Schwarz, $\langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$.

(b) Para dos observables A y B y un estado cualquiera, pruebe la relación de incerteza generalizada

$$\left\langle(\Delta A)^2\right\rangle \left\langle(\Delta B)^2\right\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle[A, B]\rangle|^2 ,$$

donde $\Delta A = A - \langle A\rangle$.

(c) Muestre que el signo igual en la relación de incerteza generalizada se obtiene cuando el estado en cuestión satisface

$$\Delta A |\alpha\rangle = \lambda \Delta B |\alpha\rangle$$

donde λ es un imaginario puro.

(d) Verifique que la función de onda de un paquete gaussiano, dada por

$$\langle x'|\alpha\rangle = (2\pi d^2)^{-1/4} \exp\left[\frac{i\langle p\rangle x'}{\hbar} - \frac{(x' - \langle x\rangle)^2}{4d^2}\right]$$

satisface la relación de incerteza mínima

$$\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}\sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle} = \frac{\hbar}{2} .$$

Muestre también que la condición

$$\langle x'|\Delta x|\alpha\rangle = c \langle x'|\Delta p|\alpha\rangle$$

donde c es un número imaginario, efectivamente se cumple para dicho paquete, en acuerdo con (b).

23. (a) Calcule

$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle \equiv \left\langle S_x^2 \right\rangle - \langle S_x \rangle^2$$

donde el valor de expectación es para el estado S_z+. Usando su resultado, verifique la relación de incerteza generalizada,

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta B)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle [A, B] \rangle \right|^2$$

con $A \to S_x$ y $B \to S_y$.

(b) Verifique la relación de incerteza con $A \to S_x$, $B \to S_y$ para el estado S_x+.

24. Encuentre la combinacion lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$ que maximiza el producto

$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta S_y)^2 \right\rangle \ .$$

Verifique explícitamente que para la combinación lineal que encontró, la relación de incerteza para S_x y S_y no se viola.

25. Evalúe $\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle$ para una partícula confinada en un pozo unidimensional

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hagalo tanto para el estado base como para los estados excitados.

26. Algunos libros definen que un operador es real cuando todos sus elementos de matriz $\langle b'|A|b''\rangle$ son reales en alguna representación ($\{|b'\rangle\}$ en este caso). ¿Es este concepto independiente de la representación, es decir, los elementos de matriz permanecen reales aún cuando se use otra base? Verifique su respuesta usando operadores familiares como S_y y S_z, o x y p_x.

27. Construya la matriz de transformación que conecta la base donde S_z es diagonal con la base en que S_x es diagonal. Muestre que su resultado es consistente con la relación general

$$U = \sum_r \left| b^{(r)} \right\rangle \left\langle a^{(r)} \right| \ .$$

28. (a) Suponga que $f(A)$ es una función de un operador hermítico A con la propiedad $A\,|a'\rangle = a'\,|a'\rangle$. Evalúe $\langle b''|f(A)|b'\rangle$ suponiendo que se conoce la matriz de transformación entre la base a' y la base b'.

(b) Usando el análogo continuo del resultado obtenido en (a), evalúe

$$\langle \mathbf{p}''|F(r)|\mathbf{p}'\rangle$$

Simplifique su expresión tanto como le sea posible. Note que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, donde x, y, z son operadores.

29. (a) Sea x y p_x la coordenada y el momento lineal en una dimensión. Evalúe el corchete de Poisson clásico

$$\{x, F(p_x)\}_{\text{clásico}} \ .$$

(b) Sean ahora x y p_x los correspondientes operadores cuánticos. Evalúe el conmutador

$$[x, \exp(\frac{i p_x a}{\hbar})] \ ,$$

y compare con (a) cuando $F(p_x) = \exp(i p_x a/\hbar)$.

(c) Usando el resultado de (b), pruebe que

$$\exp(\frac{ip_x a}{\hbar})\,|x'\rangle \qquad \text{con} \quad x\,|x'\rangle = x'\,|x'\rangle$$

es un autoestado del operador x. ¿Cuál es el correspondiente autovalor?

30. (a) Verifique que las igualdades

$$[x_i, G(\mathbf{p})] = i\hbar\frac{\partial G}{\partial p_i} \qquad\qquad [p_i, F(\mathbf{x})] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

pueden derivarse a partir de las relaciones de conmutación fundamentales, para cualquier par de funciones F y G que puedan ser expresadas en serie de potencias de su argumento.

(b) Evalúe $[x^2, p^2]$. Compare su resultado con el corchete de Poisson clásico $\{x^2, p^2\}_{\text{clásico}}$.

31. El operador de traslación para un desplazamiento espacial finito está dado por

$$\mathcal{T}(\mathbf{l}) = \exp\left(\frac{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{l}}{\hbar}\right)$$

donde $\mathbf{p}$ es el operador impulso.

(a) Evalue $[x_i, \mathcal{T}(\mathbf{l})]$.

(b) Usando (a) (o de alguna otra forma), demuestre como el valor de expectación $\langle\mathbf{x}\rangle$ cambia frente a traslaciones.

32. (a) Pruebe lo siguiente

$$\begin{aligned}\langle p'|x|\alpha\rangle &= i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle \\ \langle\beta|x|\alpha\rangle &= \int dp'\psi_\beta^*(p')i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\psi_\alpha(p')\end{aligned}$$

donde $\psi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ y $\psi_\beta(p') = \langle p'|\beta\rangle$ son las funciones de onda en el espacio de momentos.

(b) ¿Cuál es el significado físico de $\exp(ix\Xi/\hbar)$, donde x es el operador posición y Ξ es algún número con dimensiones de momento? Justifique su respuesta.