Física Teórica 2

6 de abril de 2013

1. Guía 1: Problema 1 (c)

Como varias personas nos vinieron a consultar este ejercicio y suponemos que varias más se habrán quedado con la duda, decidimos subir una solución posible a la página de la materia. El enunciado dice:

Dados dos operadores A y B tal que conmutan con su conmutador ($[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$) y dada la definición formal

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \tag{1}$$

lo que se pide es demostrar la siguiente identidad

$$e^A e^B = e^{A+B+(1/2)[A,B]}. \tag{2}$$

La manera de resolver este ejercicio no es única y la propuesta de solución que aquí presentaremos no es la más contructiva pero si bastante más corta –y elegante quizás– que la solución por fuerza bruta.

Para comenzar definamos un operador nuevo $G(t)$ que es función de una variable t real

$$G(t) = e^{tA} e^{tB} e^{-t(A+B)} \tag{3}$$

y estudiamos la derivada de este operador con respecto a nuestra variable t. Recuerden que estamos trabajando con operadores que pueden no conmutar (y de hecho no lo hacen) por lo que el orden de los factores es importante.

$$\frac{dG(t)}{dt} = (e^{tA}A)e^{tB}e^{-t(A+B)} + e^{tA}(e^{tB}B)e^{-t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}(e^{-t(A+B)}(A+B)) \tag{4}$$

Observemos también que $G(t)$ satisface la condición

$$G(t=0) = 1 \tag{5}$$

A continuación usaremos una propiedad enunciada en un ejercicio de la práctica que establece que un operador (A) conmuta con cualquier operador que sea función del primero $(f(A))$, donde f es alguna función que se pueda expresar en serie de potencias, es decir, $[A, f(A)] = 0$, análogamente a lo que sucedía con los corchetes de Poisson en Mecánica Clásica. Esto se deduce directamente al escribir dicha serie de potencias, e implica que, en particular, $[A, e^{tA}] = 0 = [B, e^{tB}] = [A + B, e^{-t(A+B)}]$. Por lo tanto, podemos conmutar este tipo de factores, y la ecuación (4) nos queda

$$\begin{aligned}
\frac{dG(t)}{dt} &= Ae^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)} + e^{tA}(e^{tB}B)e^{-t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}(A+B)e^{-t(A+B)} \\
\frac{dG(t)}{dt} &= AG(t) - e^{tA}(e^{tB}A)e^{-t(A+B)} \qquad (6)
\end{aligned}$$

Si queremos poder cancelar el primer término nos hace falta encontrar alguna manera de intercambiar A con e^{tB}, y para esto podemos usar el resultado del ítem anterior de la guía: $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$ (que también es válido únicamente para un par de operadores que conmuten con su conmutador). De este resultado y del desarrollo en serie de potencias de la exponencial se deduce que

$$\begin{aligned}
[A, e^{tB}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[A, (tB)^n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}t^n[A, B^n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}tn(tB)^{n-1}[A, B] \\
&= t\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}n(tB)^{n-1}\right)[A, B] \\
&= t\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!}(tB)^{n-1}\right)[A, B] \\
&= t\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!}(tB)^{k}\right)[A, B] \\
\left[A, e^{tB}\right] &= te^{tB}[A, B] \qquad (7)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos reemplazar $Ae^{tB} - te^{tB}[A, B] = e^{tB}A$, y recordando que A y B conmutan con su conmutador tenemos

$$\frac{dG(t)}{dt} = t[A, B]G(t) \qquad (8)$$

Para poder simplificar esta ecuación diferencial planteamos el cambio de variables $z = t^2$. De este cambio se deduce que

$$\frac{d}{dt} = 2t\frac{d}{dz} \qquad (9)$$

Y así podemos escribir la nueva ecuación diferencial para el operador G en la variable z

$$\frac{dG(z)}{dz} = \frac{1}{2}[A, B]G(z) \qquad (10)$$

Lo que nos quedá luego de este último paso es una ecuación diferencial de primer orden en el operador $G(z)$ con coeficientes independientes de z. La soulción de ecuaciones de este tipo es única a menos de una condición inicial; la misma es

$$G(z) = G(0)e^{\frac{z}{2}[A,B]}. \qquad (11)$$

Reemplazando $z = t^2$ y usando la condición inicial $(G(t=0)=1)$ que habíamos previamente establecido nos queda

$$G(t) = e^{\frac{t^2}{2}[A,B]}. \tag{12}$$

Tenemos por lo tanto que, para cualquier valor de la variable t, es válida la igualdad entre las dos formas que tenemos de definir el operador $G(t)$.

$$e^{\frac{t^2}{2}[A,B]} = e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)} \tag{13}$$

que en el caso $t = 1$ se escribe

$$e^{\frac{1}{2}[A,B]} = e^{A}e^{B}e^{-(A+B)} \tag{14}$$

que, considerando otra vez que A y B conmutan con su conmutador es equivalente a

$$\begin{aligned} e^{A}e^{B} &= e^{\frac{1}{2}[A,B]}\, e^{A+B} \\ e^{A}e^{B} &= e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \end{aligned} \tag{15}$$

que es lo que queríamos demostrar.