Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2013
Guía 4: Impulso angular y rotaciones

1. Considere la matriz de 2×2
$$U = \frac{a_0 + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}}{a_0 - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}} \ ,$$
donde a_0 es un número real, y $\mathbf{a}$ es un vector de 3 componentes reales.
   (a) Pruebe que U es unitaria y unimodular.
   (b) En general, una matriz unitaria unimodular de 2×2 representa una rotación en tres dimensiones. Encuentre el eje y el ángulo de rotación para U en términos de a_0 y las componentes del vector $\mathbf{a}$.

2. El hamiltoniano dependiente del espín de un sistema electrón-positrón en presencia de un campo magnético uniforme $B\hat{z}$, puede escribirse como
$$H = A\mathbf{S}^{(e^-)}\cdot\mathbf{S}^{(e^+)} + \left(\frac{eB}{mc}\right)(S_z^{(e^-)} - S_z^{(e^+)}) \ .$$
Suponga que la función de espín del sistema está dada por $|+\rangle_{e-} \otimes |-\rangle_{e+}$.
   (a) ¿Es ésta una autofunción de H en el límite $A \to 0$, $eB/mc \neq 0$? Si lo es, ¿cuál es el autovalor de energía? Si no lo es, ¿cuál es el valor de expectación de H?
   (b) Repita el problema cuando $eB/mc \to 0$, $A \neq 0$.

3. Considere una partícula de espín 1. Evalúe los elementos de matriz de $S_z(S_z + \hbar)(S_z - \hbar)$ y de $S_x(S_x + \hbar)(S_x - \hbar)$ sin usar la representación matricial de S_x.

4. Considere el hamiltoniano de un cuerpo rígido
$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{K_1^2}{I_1} + \frac{K_2^2}{I_2} + \frac{K_3^2}{I_3}\right)$$
donde $\mathbf{K}$ es el impulso angular en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo. A partir de esta expresión obtenga la ecuación de movimiento de Heisenberg para $\mathbf{K}$, y luego halle las ecuaciones de movimiento de Euler en el límite correspondiente.

5. ¿Cuál es el significado de la ecuación $U^{-1}A_kU = \sum R_{kl}A_l$, donde las tres componentes de A son matrices? A partir de esta ecuación, muestre que los elementos de matriz $\langle m|A_k|n\rangle$ se transforman como vectores.

6. Considere un estado arbitrario $|\alpha\rangle$ de un sistema de espín $1/2$, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo φ alrededor del eje z,
$$|\alpha\rangle_R = \exp\left(-i\frac{S_z\varphi}{\hbar}\right)|\alpha\rangle \ .$$
   (a) Calcule $\langle S_x\rangle_R$ en el sistema rotado, en función de los valores de expectación $\langle S_x\rangle$ y $\langle S_y\rangle$ en el sistema original.

(b) Muestre que para una rotación de 2π en φ se satisface

$$|\alpha\rangle_R = -|\alpha\rangle \ .$$

Observe que no se obtiene el mismo estado debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pag. 24.

7. (a) Usando las propiedades de conmutación y anticonmutación de las matrices de Pauli, pruebe la identidad

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \ ,$$

donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son dos vectores complejos en tres dimensiones.

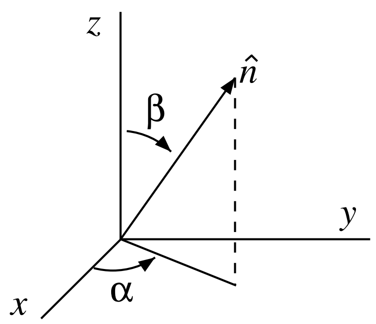
(b) Usando (a), muestre que el operador rotación para un sistema de espín $1/2$ en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ se puede escribir como

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}},\phi) = \exp\left(-i\frac{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) = I\cos\frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\sin\frac{\phi}{2} \ ,$$

donde I es la matriz identidad.

(c) Escriba explícitamente la matriz de 2×2 que representa la rotación $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}},\phi)$.

(d) Sea $\hat{\mathbf{n}}$ el versor definido por los ángulos polares α y β según se muestra en la figura. Aplíque al ket $|+\rangle$ el operador de rotación adecuado para obtener el estado $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}, +\rangle$, que representa un espín orientado según $\hat{\mathbf{n}}$. Compare el resultado con el obtenido en el problema 10 de la guía 1.



8. Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de espín $1/2$ representada por

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathcal{D}(\hat{\mathbf{z}},\alpha)\mathcal{D}(\hat{\mathbf{y}},\beta)\mathcal{D}(\hat{\mathbf{z}},\gamma) \ .$$

(a) Muestre que la matriz de 2×2 que representa esta rotación es

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\left(-i\frac{\sigma_z\alpha}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_y\beta}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_z\gamma}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix} \ .\end{aligned}$$

(b) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo θ. Encuentre θ y la dirección de dicho eje.

9. Sea $\mathbf{J}$ un operador de momento angular cualquiera, es decir que sus componentes satisfacen las relaciones de conmutación $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$.

(a) Se definen los operadores de subida y bajada en la forma $J_+ = J_x + iJ_y$ y $J_- = J_x - iJ_y$. Demostrar las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}
[J_+, J_-] &= 2\hbar J_z, \quad [J_z, J_+] = \hbar J_+, \quad [J_z, J_-] = -\hbar J_- \\
J_+ J_- &= J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \\
J_\pm |j, m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\, |j, m \pm 1\rangle \\
J_\pm |j, \pm j\rangle &= 0\ .
\end{aligned}$$

(b) Mostrar que cualquier estado de J_z satisface $\langle J_x\rangle = \langle J_y\rangle = 0$, y que si en cierto estado $|\psi\rangle$ se satisface $J_z |\psi\rangle = \hbar m |\psi\rangle$, entonces sobre ese estado el valor medio de la proyección del impulso angular $\mathbf{J}$ sobre una dirección $\hat{\mathbf{n}}$ que forma un ángulo θ con el eje x es $\langle \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\rangle = \hbar m \cos\theta$. Interprete el resultado.

10. Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, las matrices que representan a los operadores L^2, L_x, L_y, y L_z en el subespacio generado por la base $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$ de autoestados de L^2 y L_z. Verifique explícitamente multiplicando las matrices la relación $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$.

    (a) Encuentre la base $\{|l, m_y\rangle\}$ de autoestados de L^2 y L_y de dicho subespacio. Escríbala como combinación lineal de los $|l, m\rangle$.

    (b) Sea un estado descripto por el vector

    $$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1, 1\rangle - |1, -1\rangle\right)\ .$$

    Si se mide L_x, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Repita el cálculo si se mide L_y.

    (c) Sobre el estado $|\psi\rangle$ se mide L_z y se obtiene $\hbar$, e inmediatamente después se mide L_y. ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

11. Un autoestado de momento angular $|j, j\rangle$ se rota en un ángulo infinitesimal ϵ alrededor del eje y. Sin usar explicitamente la forma de la función $d^{(j)}_{m'm}$, obtenga una expresión para la probabilidad de que el nuevo estado rotado se encuentre en el estado original, hasta términos de orden ϵ^2

12. Muestre que las matrices de 3×3 G_i (i=1,2,3) cuyos elementos están dados por $(G_i)_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$, donde j y k son índices de fila y de columna, satisfacen las relaciones de conmutación del momento angular. ¿Cuál es el significado físico (o geométrico) de la transformación matricial que conecta a G_i con las representaciones de 3×3 más usuales del operador de momento angular J_i, con J_z diagonal? Relacione su resultado con la transformación

    $$\mathbf{V} \to \mathbf{V} + \hat{\mathbf{n}}\, \delta\phi \times \mathbf{V}\ ,$$

    bajo rotaciones infinitesimales. [Nota: este problema puede resultar útil para entender el espín del fotón.]

13. Construya los armónicos esféricos $Y_{1,m}$. Para ello, resuelva primero $L_+ Y_{1,1} = 0$ (L_+ en la representación r) y aplique luego el operador L_- a $Y_{1,1}$ (previamente normalizado) para hallar los otros dos restantes. Usando los resultados del problema 12, escriba la combinación lineal de estos que es autoestado de L_y con autovalor $\hbar$. Verifique su resultado aplicándole L_y en la representación r.

14. Suponga que fuera posible un valor semi-entero de l, por ejemplo $1/2$, para el impulso angular orbital. A partir de

    $$L_+\, Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi) = 0$$

podemos deducir, como de costumbre

$$Y_{1/2,1/2}(\theta,\phi) \propto e^{i\phi/2}\sqrt{\sin\theta}\ .$$

Intente construir entonces $Y_{1/2,-1/2}(\theta,\phi)$ de dos maneras diferentes:

(a) aplicando L_- a $Y_{1/2,1/2}(\theta,\phi)$,

(b) usando que $L_-\, Y_{1/2,-1/2}(\theta,\phi) = 0$.

Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios (esto da un argumento en contra de valores semi-enteros de l).

15. Considere un autoestado de impulso angular orbital $|l=2, m=0\rangle$. Suponga que este estado es rotado en un ángulo β alrededor del eje y. Encuentre la probabilidad de que el nuevo estado se encuentre en $m = 0$, ± 1, y ± 2.

16. (a) Considere un sistema con $j = 1$. Escriba explícitamente

$$\big\langle j=1, m'|J_y|j=1, m\big\rangle$$

como matriz de 3×3.

(b) Muestre que en el caso particular $j = 1$, es legítimo reemplazar $e^{iJ_y\beta/\hbar}$ por

$$1 - i\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)\sin\beta - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2(1-\cos\beta)\ .$$

(c) Usando (b) obtenga

$$d^{(j=1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta) & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \cos\beta & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta \\ \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta) \end{pmatrix}\ .$$

17. La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por:

$$\Psi(x) = (x + y + 3\,z)\, f(r)\ .$$

(a) ¿Es Ψ autofunción de L^2? Si es así, ¿cuál es el valor de l? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2 ?

(b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?

(c) Suponga que se conoce de alguna manera que $\Psi(x)$ es una autofunción de energía con autovalor E. Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

18. Usando coordenadas esféricas, obtenga una expresión para la corriente de probabilidad **j** para el estado fundamental y los excitados del átomo de hidrógeno. Muestre en particular que, para los estados con $m \neq 0$, existe un flujo toroidal en el sentido de que **j** está en la dirección de ϕ creciente o decreciente dependiendo del signo de m.

19. Considere un oscilador armónico tridimensional isótropo.

(a) Resuelva la ecuación de Schrödinger en coordenadas cartesianas suponiendo conocidas las soluciones en una dimensión. Encuentre los niveles de energía y las funciones de onda. Discuta la paridad y encuentre la degeneración.

(b) Resuelva en coordenadas esféricas. La ecuación radial se puede resolver usando la sustitución $r^2 = x$. Multiplicando las funciones de onda por $x^{1/4}$ el problema se reduce al del átomo de hidrógeno cuya solución se supone conocida. Encuentre los niveles de energía y discuta la paridad y la degeneración. Compare el resultado con (a). ¿De qué conjunto completo de operadores son autoestados estas soluciones?

20. Para una partícula sometida a un potencial de oscilador armónico tridimensional isótropo (suponga que todos los parámetros de longitud y energía valen 1) considere el estado definido por

$$\psi(x, y, z) = C(1 + x + y) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \quad C = \frac{1}{\pi^{3/4}\sqrt{2}} \, .$$

Calcule qué valores pueden medirse y con qué probabilidad de las siguientes magnitudes: L^2, L_z, L_x, y H.

21. Se fabrican dos haces parcialmente polarizados de partículas de espín 1, según las siguientes proporciones:

(a) 50% $|1, 1\rangle_z$, 50% $|1, -1\rangle_z$,

(b) 50% $|1, 1\rangle_x$, 50% $|1, -1\rangle_x$,

donde se usó la notación $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, |j, m\rangle_{\mathbf{n}} = m\hbar \, |j, m\rangle_{\mathbf{n}}$. Muestre que ambos dan el mismo $\langle \mathbf{S} \rangle$, pero que las matrices densidad son distintas. Diseñe un experimento que permita distinguirlos.

22. Se colocan dos Stern-Gerlach en serie, el segundo rotado un ángulo α respecto al primero. Incide un haz de partículas no polarizado de espín 1. ¿Qué fracción de éste atravesará el sistema sin desviarse?