Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2013
Guía 6: Matriz densidad y sistemas compuestos

1. Considere un operador autoadjunto R definido positivo, y un operador ρ tal que satisface

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\rho) &= 1 \\ \mathrm{Tr}(\rho R) &\geq 0 \qquad \text{para todo } R \end{aligned}$$

   (a) Mostrar que ρ es autoadjunto ($\rho = \rho^\dagger$) y definido positivo.
   (b) Probar que cada autovalor de ρ (denotado ρ_i) cumple $0 \leq \rho_i \leq 1$, y $\sum_i \rho_i = 1$.

2. Sobre un sistema se mide cierta magnitud A. El valor medio de los resultados de la medición $\langle A \rangle$ tiene una probabilidad p_n de ser igual a $\langle A \rangle_n$, donde

$$\langle A \rangle_n = \langle n | A | n \rangle \ ,$$

y donde $\{|n\rangle\}$ es una base ortonormal. La mezcla estadística de los estados dinámicos representados por los kets $|n\rangle$ se puede describir mediante el operador densidad

$$\rho = \sum_n |n\rangle \, p_n \, \langle n| \ .$$

donde $\sum_n p_n = 1$, y $p_n \geq 0$ para todo n.

   (a) Demuestre que el valor medio del observable A es la traza de ρA, es decir

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}(\rho A) \ .$$

   Generalize el resultado para cualquier $\mathrm{F}(A)$.
   (b) Demuestre que ρ es hermítico.
   (c) Demuestre la condición de normalización $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

3. Tenga en cuenta el siguiente lema:

   Sea ρ la matriz densidad que representa un estado de un sistema, y sea $\det(\rho)$ el determinante de dicha matriz. Tenemos pues que si $\det(\rho) \neq 0$ entonces ρ representa un estado mixto.

   (a) Decidir si el lema es verdadero o falso. Sea cual fuere el caso, justificar la respuesta.
   (b) Responder si vale la afirmación recíproca al lema. Esto es, responder si es posible asegurar la naturaleza de estado puro de un estado representado por una matriz densidad ρ con determinante nulo. Demostrar la respuesta.
   (c) Demostrar que para un estado puro $\rho^2 = \rho$, es decir $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$.

4. Considere la matriz densidad ρ de un espacio de estados de dimensión 2, cuyos elementos están dados por

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \qquad \text{para todo } i, j \in \{1, 2\}$$

y sea $\{|\psi_i\rangle\}$ la base elegida para representar al estado.

   (a) Determinar si el estado representado por ρ es un estado mixto o un estado puro.

(b) Escribir los vectores $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ en términos de aquéllos vectores que conforman la base en la cual la matriz densidad es diagonal.

(c) ¿Es siempre posible diagonalizar la matriz densidad? Justifique su respuesta.

5. Para los siguientes sistemas de espín 1/2, escriba el operador densidad, y la matriz densidad en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

   (a) Un haz completamente polarizado con S_z+.

   (b) Un haz completamente porarizado con S_x+.

   (c) Un haz no polarizado, formado por una mezcla incoherente de S_x+ y S_x- en igual cantidad (50%).

   (d) Un haz parcialmente polarizado, formado por una mezcla incoherente con 75% de S_z+ y 25% de S_x+.

   Para los casos (c) y (d), calcule los valores medios estadísticos $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$ y $\langle S_z\rangle$.

6. Considere dos conjuntos estadísticos de sistemas de espín $1/2$ A y B. El primero se encuentra en un estado puro $|\psi_A\rangle = |S_z, +\rangle$, y el segundo en el estado puro $|\psi_A\rangle = |S_x, +\rangle$. Se realiza una medición de S_x sobre el sistema A y otra de S_z sobre el sistema B, pero en ninguno de los dos casos se observa el resultado.

   (a) Escriba explicitamente ρ_A y ρ_B luego de las mediciones, en representación $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ y verifique que describen estados mezcla.

   (b) ¿Cómo se relacionan ρ_A y ρ_B? ¿Podría decir que existe una interpretación no ambigua de un operador densidad como mezcla de estados puros?

7. (a) Pruebe que la evolución temporal del operador densidad ρ en el esquema de Schrödinger está dada por

   $$\rho(t) = U(t,t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t,t_0) \ ,$$

   donde $U(t,t_0)$ es el operador de evolución temporal.

   (b) A partir de la ecuación de Schrödinger para el operador $U(t,t_0)$, encuentre la ecuación de Schrödinger para el operador densidad. ¿Cuál es la diferencia fundamental con la correspondiente ecuación de Heisenberg?

   (c) Suponga que a $t = 0$ tiene un estado puro. Muestre que el estado no puede evolucionar a uno mixto si la evolución temporal está prescripta por la ecuación de Schrödinger.

8. Considere un sistema de espín $1/2$.

   (a) Muestre que la matriz densidad puede ser escrita en la forma

   $$\rho = \frac{1}{2}\left(I + \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \ ,$$

   donde I es el operador identidad, y $\mathbf{P}$ es un vector.

   (b) Calcule $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$. ¿Cuál es la interpretación física del vector $\mathbf{P}$?

   (c) En presencia de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{z}$, el hamiltoniano del sistema es

   $$H = -\left(\frac{eB}{mc}\right) S_z \ .$$

   Encuentre la ecuación de evolución para $\mathbf{P}$. Interprete el resultado.

9. Considere un sistema compuesto de dos partes, cada una de las cuales tiene un espacio de estados de dimensión 2 (denotados como $\mathcal{H}_A$y $\mathcal{H}_B$). En cada uno de esos espacios se define una base de estados $\{|-\rangle_A, |+\rangle_A\}$ y $\{|-\rangle_B, |+\rangle_B\}$. Asimismo, se definen observables σ_i^A y σ_i^B $(i = x, y, z)$ para ambos sistemas, cuyas representaciones matriciales en estas bases están dadas por las matrices de Pauli.

   (a) Encuentre una base del espacio de estados del sistema compuesto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, cuyos vectores correspondan a estados producto. Encuentre otra base donde los vectores no sean estados producto.

   (b) Considere los siguientes conjuntos de observables para el sistema compuesto: $C_1 = \{\sigma_z^A \otimes I^B, I^A \otimes \sigma_z^B\}$, $C_2 = \{\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B, \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B\}$. Demuestre que tanto C_1 como C_2 son conjuntos completos de observables que conmutan. Encuentre una base de autovectores para los operadores de C_1, y otra para los de C_2.

10. Considere los siguientes estados del sistema compuesto descripto en el problema anterior:

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|--\rangle \pm |++\rangle\right) \\ |\Psi\rangle_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|-+\rangle \pm |+-\rangle\right) \ . \end{aligned}$$

   (a) Calcule las probabilidades de los resultados posibles en la medición de un observable cualquiera sobre el subsistema A.

   (b) Para cada uno de los estados $|\Phi\rangle_\pm$ y $|\Psi\rangle_\pm$ calcule el valor medio de los observables $\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_A \otimes \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \boldsymbol{\sigma}_B$, donde $\hat{\mathbf{n}}_A$ y $\hat{\mathbf{n}}_B$ son dos versores arbitrarios.

11. Considere un sistema compuesto por tres partes, cada una de las cuales tiene un espacio de estados de dimensión 2 como en el problema anterior.

   (a) Encuentre una base del espacio de estados compuesto formada por vectores producto. En particular, encuentre la base de estados comunes de los operadores $\sigma_z^A \otimes I^B \otimes I^C$, $I^A \otimes \sigma_z^B \otimes I^C$, y $I^A \otimes I^B \otimes \sigma_z^C$.

   (b) Encuentre la base de autoestados comunes de los siguientes operadores: $\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B \otimes I^C$, $I^A \otimes \sigma_x^B \otimes \sigma_x^C$, y $\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B \otimes \sigma_z^C$. Para cada uno de estos estados, calcule las probabilidades para los resultados de la medición de un observable cualquiera, para la partícula A y para el subsistema formado por las partículas A y B.

12. Suponga que el sistema compuesto descripto en el problema 8 es sometido al siguiente protocolo:

   (a) Se prepara un estado inicial

$$|\Psi\rangle_{AB} = |\Phi\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|--\rangle + |++\rangle\right) \ .$$

   (b) Los subsistemas A y B son separados y llevados a laboratorios distantes

   (c) En el laboratorio del subsistema A un físico aplica un campo magnético en alguna dirección y con duración e intensidad elegidas de modo tal que el operador de evolución temporal es alguno de los siguientes operadores según la dirección elegida del campo magnético: $U_x = \sigma_x$, $U_y = \sigma_y$, o $U_z = \sigma_z$.

   (d) El subsistema A es trasladado al laboratorio donde se encuentra el subsistema B.

   Encuentre cuál es el estado del sistema completo en cada caso. Discuta cuál podría ser la estrategia del físico del laboratorio A para enviar información en el subsistema B.

13. Considere una partícula de spín $1/2$ que puede moverse en tres dimensiones. Diga cuál es el espacio de estados del sistema y encuentre una base completa del mismo.

    (a) Suponga que en el instante $t = 0$ el estado es

    $$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle + |-\rangle\right) \otimes |\alpha_x\rangle \otimes |\alpha_y\rangle \otimes |\alpha_z\rangle \ , \tag{1}$$

    donde $|\pm\rangle$ son autoestados de S_z. Los kets $|\alpha_i\rangle$ son estados coherentes caracterizados por valores medios $\Re(\alpha_i) = L_i$, $\Im(\alpha_i) = P_i$ ($\Re$ y $\Im$ denotan parte real e imaginaria respectivamente), dispersión en la posición δ_i, e incerteza mínima. Suponga que el hamiltoniano del sistema es de la forma $H = \lambda z \otimes \sigma_z$ (¿qué unidades tiene la constante λ?). Diga cuál es el estado del sistema a tiempo t (tenga en cuenta que el hamiltoniano solamente depende de la coordenada espacial z, y que por lo tanto la evolución de la parte espacial del estado cuántico es trivial en x y en y).

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de medir la posición de la partícula en el instante t? ¿Cuál es la probabilidad de medir la componente z del espín en ese instante? Considere el caso particular en que el estado inicial es tal que $P_y = P_z = 0$ y discuta la relación entre este problema y el experimento de Stern y Gerlach.

    (c) Repita las consideraciones del item anterior si el hamiltoniano es de la forma $H = \lambda' p \otimes \sigma_z$.

14. Esta paradoja, en la línea de EPR, fue propuesta por D. Mermin (ver *Am. J. Phys*, **58**, 731 [1990], o *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 3373 [1990]). Considere un sistema de 3 partículas de espín $1/2$, en un estado $\psi = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)(\mathsf{u}_1\mathsf{u}_2\mathsf{u}_3 - \mathsf{v}_1\mathsf{v}_2\mathsf{v}_3)$, con $\mathsf{u} = |s_z, +\rangle$, $\mathsf{v} = |s_z, -\rangle$, y donde $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ tiene una forma que asegura que las partículas están muy separadas espacialmente entre sí.

    (a) Muestre que ψ es autoestado de los siguientes cuatro operadores

    $$(\sigma_{1x}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3y})\psi = \psi \qquad (\sigma_{1y}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3y})\psi = \psi$$

    $$(\sigma_{1y}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3x})\psi = \psi \qquad (\sigma_{1x}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3x})\psi = -\psi$$

    (b) Verifique que los cuatro operadores conmutan entre sí, y que

    $$(\sigma_{1x}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3y})(\sigma_{1y}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3y})(\sigma_{1y}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3x}) = -(\sigma_{1x}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3x})$$

    (c) Se mide, simultáneamente sobre las tres partículas, su σ_x (o su σ_y) con resultado m_x (o m_y). Muestre que (*i*) si para las tres se mide σ_x , se obtendrá con certeza $m_{1x}\,m_{2x}\,m_{3x} = -1$; (*ii*) si en cambio se mide σ_x para una y σ_y para las otras dos, se obtendrá que el producto de las tres es la unidad: $m_{1x}\,m_{2y}\,m_{3y} = 1$, $m_{1y}\,m_{2x}\,m_{3y} = 1$, $m_{1y}\,m_{2y}\,m_{3x} = 1$.

    (d) Discuta ahora el siguiente razonamiento: Las tres mediciones (c)-(*ii*) se pueden realizar consistentemente una tras otra sin importar el orden, pues los tres operadores conmutan. Multiplicando las tres mediciones sucesivas compatibles el resultado es $m_{1x}\,m_{2x}\,m_{3x} = 1$, en contradicción con el resultado predicho para la medición directa, (c)-(*i*).

15. El resultado de la aniquilación de un electrón y un positrón que produce un par de fotones A y B, puede ser descripto mediante una matriz densidad de 4×4 dada por

    $$\rho_{AB} = \frac{1}{4}\left(I_A I_B - \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B\right) \ ,$$

    donde I y $\boldsymbol{\sigma}$ son matrices de 2×2 que operan sobre la función de onda de polarización del fotón A o B según denote el subíndice. I es la matriz identidad, y las matrices $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_y$, $\boldsymbol{\sigma}_z$, son las matrices de Pauli.

(a) Utilizando los resultados del ejercicio 8 para sistemas de dos niveles, interprete la expresión de ρ_{AB}.

(b) Evalúe la polarización del fotón A tomando

$$P_A = \mathrm{Tr}_A \left[\left(\mathrm{Tr}_B \rho_{AB} \right) \boldsymbol{\sigma}_A \right] \ .$$

¿Por qué esta expresión describe la polarización del fotón A? Interprete el resultado. Repita el cálculo para la polarización del fotón B. ¿Describe ρ_{AB} un estado puro?

(c) Se tienen ahora dos detectores configurados para responder, el primero a una polarización $\mathbf{P}_A^{det}$ del fotón A, y el segundo a una polarización $\mathbf{P}_B^{det}$ del fotón B. El primero está descripto por la matriz densidad

$$\rho_A^{det} = \frac{1}{2} \left(I_A + \mathbf{P}_A^{det} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A \right) I_B \ .$$

Inteprete y construya la matriz densidad del segundo detector ρ_B^{det}. Calcule

$$\mathrm{Tr} \left(\rho_{AB} \rho_A^{det} \rho_B^{det} \right) \ ,$$

e interprete fisicamente el resultado. ¿Qué ocurre cuando $\mathbf{P}_A^{det}$ y $\mathbf{P}_B^{det}$ son paralelos? ¿Y cuando son antiparalelos? ¿Qué conclusión puede sacar sobre la correlación entre las polarizaciones de los fotones A y B?