TEMA 1

Nombre:

Hojas entregadas:

Ej.1	*Ej.2*	*Ej.3*	*Ej.4*

Física Teórica II, Primer Parcial, Primer Cuatrimestre 2013

1. Considere un sistema cuyo Hamiltoniano, en alguna base, está representado por la matriz H, y un observable A que representamos matricialmente en la misma base:

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Si se realiza un experimento para medir A, ¿qué resultados se puede obtener? ¿Si se conoce el valor de A medido, es posible determinar con precisión cuál es el estado del sistema después de la medición, sin importar cuál era el estado antes? ¿Por qué? Escriba explícitamente la base de autoestados de A. Si el estado del sistema, escrito en la misma base que las matrices, está dado por:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 0, 1, 0, 1)^t$$

¿Qué valores de A se pueden medir y con qué probabilidad?

b) Suponga que el sistema está dado por $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}(|a\rangle + |-a\rangle)$, y se mide la energía del sistema: ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidad? Escriba el estado del sistema después de la medición para cada caso. (Hemos llamado $|q\rangle$ a los autoestados de A con autovalor q; esto es $A|a\rangle = a|a\rangle$, $A|-a\rangle = -a|-a\rangle$ y $A|0\rangle = 0$.)

c) Si se realiza una medición de H y luego una medición de A, ¿se obtendrán los mismos resultados que si se mide primero A y después H? ¿Por qué? Suponga que por alguna razón el observable A no puede medirse, pero quiere medirse alguna magnitud que permita distinguir entre estados con la misma energía. Proponga un operador que permita esto, escribiendo su representación matricial **en la base que crea conveniente.**

2. Considere una partícula de masa m y carga e que se encuentra bajo la acción de un potencial armónico tridimensional y un campo eléctrico $\mathbf{E} = E_0\hat{z}$. Bajo estas consideraciones, el Hamiltoniano de la partícula es:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{mw^2}{2}\mathbf{r}^2 - eE_0 z$$

a) Obtenga las autoenergías asociadas a H y muestre de qué manera el campo eléctrico modifica las energías del oscilador armónico.
Ayuda: Reescriba H haciendo el cambio apropiado del operador $\hat{z}$ y vea que las relaciones de conmutación usuales de $[\mathbf{x}, \mathbf{p}]$ se mantienen.

b) Suponga un estado inicial del tipo:

$$|\psi_0\rangle = \frac{(|0\rangle_x + |2\rangle_x)}{\sqrt{2}} |0\rangle_y |0\rangle_z$$

Halle la evolución temporal del estado y encuentre el tiempo más corto τ en el que el sistema se encuentra en un estado ortogonal al inicial.

c) Calcule las dispersiones en cada dirección $\langle \Delta x_i{}^2\rangle\langle \Delta p_i{}^2\rangle$ en función del tiempo a partir de la representación de Heinsenberg. Interprete el resultado.
Ayuda: El estado fundamental del oscilador armónico es un estado coherente.

3. El hamiltoniano de una partícula de Spin 1/2 viene dado por $H = \frac{2c}{\hbar}\vec{S}.\vec{P}$, donde $\vec{S}$ es el operador de spin y $\vec{P}$ es el operador de momento lineal y c es alguna constante con unidades de velocidad.

   a) Calcule $[\vec{L}, H]$ y $[\vec{S}, H]$, donde $\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}$ es el operador asociado al momento angular orbital. Construya a partir de estos resultados un operador vectorial que conmute con H. Muestre que este nuevo operador cumple con las reglas de conmutación del momento angular.

   b) Encuentre los valores de energía que se pueden medir. (Sugerencia: calcule el conmutador $[\vec{P}, H]$).

   c) Utilizando operadores de subida y bajada para el spin, calcule el valor medio de la energía $\langle E \rangle$ para un $|\Psi\rangle$ que es autoestado de $\vec{P}$ y de S_z (con autovalor positivo) en función del ángulo entre los vectores de spin y momento de la partícula. (Sugerencia: aplique en un primer lugar el operador $\vec{P}$ y considere $\vec{p} = p\hat{p}$).

4. Considere el Hamiltoniano del ejercicio anterior.

   a) Escriba explícitamente y desarrolle el operador de evolución temporal cuando este actúa sobre un estado $|\Psi(t=0)\rangle$ que es autoestado de $\vec{P}$ con autovalor $\vec{p} = p_x\hat{x}$. Luego, para ese mismo estado del que además se sabe que tiene $S_z\,|\Psi(t=0)\rangle = \hbar/2\,|\Psi(t=0)\rangle$, es decir, el estado $|\Psi(t=0)\rangle = |\vec{p} = p_x\hat{x}, +\rangle$, cacule la probabilidad de medir S_z positivo para cualquier $t > 0$.

   b) Usando el teorema de Ehrenfest escriba las ecuaciones de evolución temporal para el valor medio del momento y la posición; esto es $\frac{d}{dt}\langle\vec{p}\rangle =?$ y $\frac{d}{dt}\langle\vec{x}\rangle =?$. Evalúe el lado derecho de la ecuación de la posición sobre un estado arbitrario cuya parte de espín está parametrizada por dos números reales $a \in [-1, 1]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$ tales que

$$|S\rangle = a\,|+\rangle + \sqrt{1-a^2}\,e^{i\phi}\,|-\rangle$$

   c) Con el resultado del punto anterior evalúe

$$\left|\left|\frac{d\langle\vec{x}\rangle}{dt}\right|\right| = \left[\left(\frac{d\,\langle x\rangle}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\,\langle y\rangle}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\,\langle z\rangle}{dt}\right)^2\right]^{1/2}$$