Física Teórica 2

14 de junio de 2013

1. Oscilador armónico y Paridad

Quería hacer unos comentarios respecto a la paridad y el oscilador armónico en el contexto de lo que discutimos en la última práctica.

Estudiando las soluciónes

El oscilador armónico unidimensional de Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{mw^2}{2}x^2 \tag{1}$$

tiene estados estacionarios $|n\rangle$ con $n = 0, 1, 2...$ que satisfacen $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ con $E_n = \hbar w(n+1/2)$. Resolviendo la ecuación diferencial para estos estados se llega a que

$$\langle x|n\rangle = \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{mwx^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{mw}{\hbar}}x\right) \tag{2}$$

donde $H_n(z)$ son los polinomios de Hermite dados por

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2} \tag{3}$$

Notando que $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ vemos que los autoestados $\psi_n(x)$ tienen paridad definda ya que $\psi_n(-x) = (-1)^n\psi_n(x)$. De aquí que los estados con número de ocupación par tienen paridad positiva y los estados con número de ocupación impar tienen paridad negativa.

Estudiando el problema algebraicamente

Supongamos que por alguna razón desconocemos la solución exacta del oscilador armónico en el espacio de las coordenadas. Queremos entonces entender la paridad de los estados de manera puramente algebrica. Esto puede ser útil pués aplicando una lógica similar uno puede en principio determinar la paridad de los estados de problemas más complicados al oscilador armónico de los cuales realmente no conoce las soluciónes en el espacio de coordenadas.

Habíamos definido el operador de la paridad Π de manera que anticonmuta con $\hat{p}$ y con $\hat{x}$. Como consecuencia, el operador de paridad conmuta con el operador Hamiltoniano; esto es $[H, \Pi] = 0$.

Por otro lado, sabemos que si dos operadores conmutan, como en este caso la paridad y el hamiltoniano, entonces pueden ser diagonalizados simultaneamente en una base particular. A su vez, el hamiltoniano unidimensional no tiene degeneración. Esto es, dado un autovalor del hamiltoniano $E_n = \hbar w(n + 1/2)$ existe un único estado caracterizado por ese autovalor, que es el estado que llamamos $|n\rangle$. Al no existir degeneración podemos decir que existe entonces una única base en la que el hamiltoniano es diagonal, pero entonces, como el hamiltoniano y la paridad pueden ser diagonalizados simultaneamente, esa única base en la que el hamiltoniano es diagonal, tiene que ser la misma base en la que la paridad es diagonal [1]. De aquí que los estados $|n\rangle$ tienen que ser autoestados del operador Π; esto es

$$\Pi|n\rangle = s_n|n\rangle \tag{4}$$

y s_n es un signo que queremos determinar.

Dado que $\hat{x}$ y $\hat{p}$ anticonmutan con el operador de paridad Π, tenemos entonces que los operadores de subida y bajada

$$\{a, \Pi\} = 0, \qquad \{a^\dagger, \Pi\} = 0 \tag{5}$$

Operando con $a^\dagger$ sobre $\Pi|n\rangle$ tenemos que

$$a^\dagger(\Pi|n\rangle) = -\Pi a^\dagger|n = -\sqrt{n+1}\,\Pi|n+1\rangle \tag{6}$$

donde en el primer paso usamos (5) y en el segundo el hecho de que $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$. Ahora usamos que $\Pi|n\rangle = s_n|n\rangle$ a izquierda y derecha de la ecuación y usamos una vez más el operador de subida y obtenemos

$$s_n\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle = -\sqrt{n+1}\,s_{n+1}|n+1\rangle \tag{7}$$

y de aquí inferimos que

$$s_n = -s_{n+1} \tag{8}$$

Esto quiere decir que la paridad es alternada, es decir, si el estado $|n\rangle$ es par el $|n+1\rangle$ es impar y viceversa. Por ende, nos basta con saber la paridad de un solo estado para poder obtener la paridad de todos los estados.

Ese único estado sobre el cual necesitamos saber la paridad es conveniente que sea el fundamental. Como ya vimos en la práctica, el estado fundamental es un estado coherente que tiene incerteza mínima, es decir:

$$\langle 0|(\delta x)^2|0\rangle\langle 0|(\delta p)^2|0\rangle = \hbar^2/4 \tag{9}$$

y esto se obtiene sin resolver una sola ecuación diferencial. Al tener incerteza mínima sabemos que no existe otra posibilidad que el que el estado sea una Gaussiana. Por otro lado si miramos el valor medio de $\hat{x}$ en el fundamental tenemos que

$$\langle 0|\hat{x}|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}\langle 0|(a+a^\dagger)|0\rangle = 0 \tag{10}$$

Sabemos entonces que tenemos una Gaussiana y que, al tener valor medio en $\hat{x}$ que es cero, sabemos que la Gaussiana está centrada en el origen: de aquí podemos inferir que es una función par.

Como decíamos antes, al saber que el fundamental es par, sabemos que el primer excitado es impar, que el segundo es par y así sucesivamente. En otras palabras

$$\Pi|n\rangle = (-1)^n\,|n\rangle \tag{11}$$

[1] Ver teorema 4.2.31-4.2.32 en el Sakurai.