

## Física Teórica II, Primer cuatrimestre 2013. Segundo Parcial

1. (4 puntos) La compuerta cuántica C-NOT es una de las componentes principales para la construcción de computadoras cuánticas. Uno de sus principales usos es romper el entrelazamiento entre partículas del sistema. En un sistema de dos partículas de spin 1/2 la compuerta C-NOT opera cambiando la proyección de spin de la segunda partícula, si y solo si, la primera tiene proyección up ( $m = +$ ). En la base  $z$   $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  esta compuerta puede ser representada como:

$$H_{CNOT} = \hbar\omega_0 \left( |+\rangle_{AA} \langle +| \otimes \sigma_B^x + |-\rangle_{AA} \langle -| \otimes \hat{I}_B \right)$$

- a) Obtenga una expresión para el operador evolución temporal en la base producto (Desarrolle explícitamente la exponencial).  
 b) Si el sistema se encuentra inicialmente en el estado singlete de spin, escriba el estado a un tiempo posterior  $t = \frac{\pi}{2\omega_0}$ . ¿Está entrelazado?  
 c) Teniendo el mismo estado inicial que en el ítem anterior, halle la matriz reducida  $\rho_A$  a tiempo  $t = \frac{\pi}{4\omega_0}$ . ¿Corresponde a un estado puro? ¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor positivo al medir el spin en  $z$ ?

2. (3 puntos) El problema del átomo de hidrógeno presenta soluciones del tipo  $|nlm\rangle$  asociadas a las funciones de onda posibles del electrón de manera tal que  $\langle \vec{r} | nlm \rangle = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ . La energía depende únicamente de  $n$ . Por otro lado, el electrón tiene espín 1/2.

a) Teniendo en cuenta el momento angular orbital y el intrínseco, escriba la base desacoplada del subespacio degenerado asociado a  $n = 2$ . Defina el momento angular total  $J$  y construya la base acoplada.

b) A partir de ahora, analizaremos únicamente el subespacio de menor  $j$  incluido dentro del estudiado en el ítem anterior. Con el objetivo de romper la degeneración se introduce una perturbación dada por un campo eléctrico uniforme en la dirección  $z$  ( $|\vec{E}| \ll 1$ ). Encuentre la matriz del potencial  $V = -eEz$  asociado a dicha perturbación en este subespacio anulando la mayor cantidad posible de elementos de matriz por argumentos de simetría (i.e. paridad, Wigner-Eckart, inversión temporal, etc).

c) Calcule las correcciones en las energías a primer orden. ¿Se logró el objetivo de romper totalmente la degeneración?

$$\text{Datos: } Y_0^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta), Y_1^{\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{\pm i\phi} \text{ y}$$

$$\int d\Omega Y_l^m(\theta, \phi) Y_{l'}^{*m'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Además, podría serle útil la siguiente integral radial:  $\langle n = 2, l = 0 | r | n = 2, l = 1 \rangle = 3\sqrt{3}a_0$  donde  $a_0$  es el radio de Bohr.

3. (3 puntos) Considere un péndulo gravitatorio cuántico cuyo Hamiltoniano viene dado por

$$\hat{H} = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - \lambda \cos \varphi$$

donde  $\lambda = mgl$  es una constante con unidades de energía,  $\varphi$  es un ángulo  $\varphi \in [0, 2\pi)$  y  $p_\varphi$  puede escribirse en el espacio de las coordenadas como  $p_\varphi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$

a) Para  $\lambda = 0$  calcule todas las autofunciones (normalizadas)  $\psi_n(\varphi)$  y autovalores  $E_n$  de este hamiltoniano teniendo en cuenta que las autofunciones deben ser  $2\pi$ -periódicas. Esto es,  $\hat{H}\psi_n(\varphi) = E_n\psi_n(\varphi)$  y  $\psi(2\pi) = \psi(0)$

b) Usando teoría de perturbaciones en  $\lambda$ , calcule la primer corrección perturbativa no trivial a todos los niveles de energía de este problema.

$$\text{Integrales útiles: } \forall q \in \mathbb{Z} \quad \int_0^{2\pi} e^{iq\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{q,0} \quad \int_0^{2\pi} e^{iq\varphi} \cos(\varphi) d\varphi = \pi(\delta_{q,-1} + \delta_{q,1}) \quad (1)$$