Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2013
Guía 7: Simetrías

1. Calcule los tres niveles de energía mas bajos, junto con sus degeneraciones, para los siguientes sistemas (suponga que se trata de partículas distinguibles de igual masa):
   (a) Tres partículas no interactuantes de espín $1/2$ en una caja de longitud L.
   (b) Cuatro partículas no interactuantes de espín $1/2$ en una caja de longitud L.

2. Sea $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ el operador de traslación con vector despazamiento $\mathbf{d}$, $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ el operador de rotación ($\hat{\mathbf{n}}$ y ϕ son respectivamente el eje y el ángulo de rotación), y Π el operador de paridad. ¿Cuáles de los siguientes pares de operadores conmutan? ¿Por qué?
   (a) $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ y $\mathcal{T}_{\mathbf{d}'}$ ($\mathbf{d}$ y $\mathbf{d}'$ en distintas direcciones).
   (b) $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ y $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}', \phi')$ ($\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}'$ en distintas direcciones).
   (c) $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ y Π.
   (d) $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ y Π.

3. Se sabe que un estado cuántico $|\Phi\rangle$ es simultaneamente autoestado de dos operadores hermíticos A y B que anticonmutan. ¿Qué puede decir sobre los correspondientes autovalores de A y B para este estado? Ilustre el resultado usando el operador paridad y el operador de momentos (utilice que $\Pi = \Pi^{-1} = \Pi^{\dagger}$).

4. Considere dos autoestados del operador paridad
$$\Pi\,|\alpha\rangle = \epsilon_\alpha\,|\alpha\rangle \qquad \Pi\,|\beta\rangle = \epsilon_\beta\,|\beta\rangle \ ,$$
donde los autovalores ϵ_α y ϵ_β pueden ser 1 o -1. Muestre que
$$\langle\beta|\mathbf{x}|\alpha\rangle = 0$$
salvo si $\epsilon_\alpha = -\epsilon_\beta$. Relacione este resultado con el argumento usual $\int \phi_\beta^* \mathbf{x} \phi_\alpha \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0$ si ϕ_α y ϕ_β tienen la misma paridad. ¿Qué ocurre con $\langle\beta|\mathbf{p}|\alpha\rangle$? ¿Y con $\langle\beta|\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}|\alpha\rangle$?

5. Considere la función de onda de una partícula sin espín
$$\langle\mathbf{x}|\alpha l m\rangle = R_\alpha(r) Y_l^m(\theta,\phi) \ .$$
¿Qué puede decir del $V(\mathbf{r})$ en que se encuentra la partícula? Usando las expresiones de los armónicos esféricos, muestre que frente a la transformación de paridad $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$, el estado se transforma como
$$\Pi\,|\alpha l m\rangle = (-1)^l\,|\alpha l m\rangle \ .$$
¿Qué puede decir de las propiedades de conmutación de Π y $\mathbf{L}$?

6. Una partícula de espín $1/2$ está ligada a un centro fijo por un potencial esféricamente simétrico. Considere las funciones espín-angulares,
$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_l^{j=l\pm 1/2, m} &= \pm\sqrt{\frac{l \pm m + 1/2}{2l+1}} Y_l^{m-1/2}(\theta,\phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l \mp m + 1/2}{2l+1}} Y_l^{m+1/2}(\theta,\phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{l \pm m + 1/2}\, Y_l^{m-1/2}(\theta,\phi) \\ \sqrt{l \mp m + 1/2}\, Y_l^{m+1/2}(\theta,\phi) \end{pmatrix} ,
\end{aligned}$$
que son autofunciones de L^2, S^2, J^2, y J_z simultaneamente.

(a) Escriba la función espín-angular $\mathcal{Y}_{l=0}^{j=1/2,m=1/2}$.

(b) Exprese $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x})\mathcal{Y}_{l=0}^{j=1/2,m=1/2}$ en términos de $\mathcal{Y}_{l}^{j,m}$.

(c) Muestre que el resultado obtenido en (b) se puede interpretar usando las propiedades de transformación de $\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$ ante rotaciones e inversión espacial (paridad).

7. Debido a interacciones débiles existentes entre los electrones atómicos y el núcleo, se puede tomar un potencial que viola paridad de la siguiente forma:

$$V = \lambda[\delta^3(\mathbf{x})\mathbf{S} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}\delta^3(\mathbf{x})] \ ,$$

donde $\mathbf{S}$ y $\mathbf{p}$ son los operadores de espín y de momento del electrón respectivamente, y se supone que el núcleo está ubicado en el origen de coordenadas. Como resultado, el estado fundamental de un átomo alcalino, usualmente caracterizado por $|n, l, j, m\rangle$, en realidad contiene pequeñas contribuciones provenientes de otros autoestados en la siguiente manera:

$$|n, l, j, m\rangle \to |n, l, j, m\rangle + \sum_{n'l'j'm'} C_{n'l'j'm'} \left|n', l', j', m'\right\rangle \ .$$

Usando solamente consideraciones de simetría, ¿qué puede decir acerca de los (n', l', j', m') que dan contribuciones no nulas? Suponga que las funciones de onda radiales y los niveles de energía son conocidos. Indique como calcularía los $C_{n'l'j'm'}$. ¿Se obtienen más restricciones acerca de los (n', l', j', m')?

8. Sea una partícula sometida a un potencial de oscilador armónico cuyo estado inicial a $t = 0$ es el estado coherente

$$|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \sum_{n=0} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \ ,$$

donde $\beta \in \mathbb{C}$.

(a) Se mide el operador paridad Π a $t = 0$ obteniéndose el autovalor $+1$. ¿Cuál es el estado $|\psi\rangle$ del sistema a tiempo $t > 0$?

(b) ¿Qué valores puede tomar a $t > 0$ el operador H y con qué probabilidad? ¿Cuál es el estado a un tiempo posterior? ¿Cuál es el primer estado excitado? ¿Qué resultados posibles daría la medición de Π?

(c) Si se quisiera medir el operador de aniquilación a en el estado $|\psi\rangle$, ¿qué valores podría obtener?

(d) Calcule el valor medio de los operadores a y $a^\dagger$. ¿Es $|\psi\rangle$ un estado coherente?

9. Muestre que los operadores $P_+ = (1 + \Pi)/2$ y $P_- = (1 - \Pi)/2$ son proyectores. ¿Qué condición debe cumplir $\psi(r)$ para que $|\psi\rangle$ pertenezca al subespacio invariante de P_+ o de P_-? ¿Qué quiere decir físicamente que $P_+ + P_- = 1$?

10. Considere un potencial rectangular simétrico dado por

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{para } |x| > a + b \\ 0 & \text{para } a < |x| < a + b \\ V_0 > 0 & \text{para } |x| < a \ . \end{cases}$$

Asumiendo que V_0 es mucho mayor que las energías correspondientes a los niveles mas bajos, obtenga una expresión aproximada para la separación en la energía de los dos estados mas bajos. ¿Qué ocurre en el límite $V_0 \to \infty$? ¿Tienen en este caso los autoestados de la energía paridad definida? Justifique.

11. Evalúe los siguientes elementos de matriz. Si alguno se anula, explique por qué usando argumentos de simetría.

    (a) $\langle n = 2, l = 1, m = 0|x|n = 2, l = 0, m = 0\rangle$.

    (b) $\langle n = 2, l = 1, m = 0|p_z|n = 2, l = 0, m = 0\rangle$.

    (c) $\langle L_z\rangle$ para un electrón en un campo central con $j = 9/2$, $m = 7/2$, y $l = 4$.

    En (a) y (b), $|nlm\rangle$ son los autoestados de energía del átomo de hidrógeno ignorando los efectos de espín.

12. (a) Sea $\phi(x, t)$ la función de onda de una partícula sin espín correspondiente a una onda plana en tres dimensiones. Muestre que $\phi^*(x, -t)$ es la función de onda de una onda plana con la dirección del momento invertida .

    (b) Sea $\chi(\hat{\mathbf{n}})$ el auto-espinor de dos componentes de $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ con autovalor $+1$. Utilizando la forma explícita de $\chi(\hat{\mathbf{n}})$ en términos de los ángulos polares y azimutales α y β que caracterizan a $\hat{\mathbf{n}}$, verifique que $-i\sigma_y\chi^*(\hat{\mathbf{n}})$ es el auto-espinor con la dirección de espín invertida.

13. (a) Asumiendo que el hamiltoniano es invariante ante inversión temporal, pruebe que la función de onda para un sistema no degenerado sin espín, puede ser elegida real en cada instante de tiempo.

    (b) La función de onda para un estado de onda plana está dada en $t = 0$ por la función compleja $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}$. ¿Por qué esto no viola la invariancia de inversión temporal?

14. Sea $\phi(\mathbf{p}') = \langle\mathbf{p}'|\alpha\rangle$ la función de onda en representación de momentos del estado $|\alpha\rangle$. La función de onda en representación de momentos del estado $\Theta|\alpha\rangle$ (donde Θ es el operador de inversión temporal), ¿está dada por $\phi(\mathbf{p}')$, $\phi(-\mathbf{p}')$, $\phi^*(\mathbf{p}')$, o por $\phi^*(-\mathbf{p}')$? Justifique.

15. (a) ¿Cuál es el estado inverso-temporal correspondiente a $\mathcal{D}(R)|j, m\rangle$?

    (b) Usando las propiedades de inversión temporal y rotaciones, pruebe que

    $$\mathcal{D}^{(j)*}_{m',m}(R) = (-1)^{m-m'}\mathcal{D}^{(j)}_{-m',-m}(R) .$$

    (c) Pruebe que $\Theta|j, m\rangle = i^{2m}|j, -m\rangle$.

16. Suponga que una partícula sin espín está ligada a un centro fijo por un potencial $V(\mathbf{x})$, tan asimétrico que ningún nivel de energía es degenerado. Usando invariancia ante inversión temporal, pruebe que

    $$\langle\mathbf{L}\rangle = 0$$

    para cualquier autoestado de energía. Si la función de onda de uno de estos autoestado no degenerados se expande en la forma

    $$\sum_l\sum_m F_{lm}(r)Y_l^m(\theta, \phi) ,$$

    ¿qué tipo de restricciones de fase se obtienen para $F_{lm}(r)$?

17. El hamiltoniano de un sistema de espín 1 está dado por

    $$H = AS_z^2 + B(S_x^2 - S_y^2) .$$

    Resuelva exactamente este problema para encontrar los autoestados normalizados de energía y sus autovalores (un hamiltoniano dependiente del espín de este tipo aparece en el estudio de cristales). ¿Es este hamiltoniano invariante ante inversión temporal? ¿Cómo se transforman ante inversión temporal los autoestados normalizados obtenidos?