Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2013
Guía 9: Partículas idénticas

1. (a) N partículas idénticas de espín $1/2$ están sometidas a un potencial de oscilador armónico unidimensional. ¿Cuál es la energía del estado fundamental?

   (b) Suponga $N = 2$. Escriba el vector de estado del sistema correspondiente al estado fundamental. ¿Existe alguna restricción para el valor del espín total del sistema? Interprete físicamente.

2. Construya los estados posibles de varias partículas en cada uno de los siguientes casos:

   (a) Dos bosones de espín 1.

   (b) Tres bosones de espín 1.

   (c) Dos fermiones de espín $7/2$.

3. Dos partículas distinguibles de espín 1 sin impulso angular orbital pueden tener $j = 0$, $j = 1$, o $j = 2$. Suponga ahora que las partículas son idénticas. ¿Qué restricciones se obtienen?

4. Sean dos partículas en la órbita $N = 2 = 2n + l$ del oscilador armónico tridimensional isótropo. Considere que dichas partículas son:

   (a) fermiones de espín $1/2$,

   (b) bosones de espín 0.

   De un listado de los posibles estados de dos partículas utilizando las siguientes bases ($J = L + S$):

   (i) $l_1\ l_2\ s_1\ s_2\ m_{l_1}\ m_{l_2}\ m_{s_1}\ m_{s_2}$,

   (ii) $l_1\ l_2\ s_1\ s_2\ j_1\ j_2\ m_{j_1}\ m_{j_2}$,

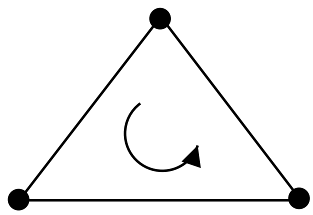
   (iii) $l_1\ l_2\ s_1\ s_2\ j_1\ j_2\ J\ M_J$,

   (iv) $l_1\ l_2\ s_1\ s_2\ L\ S\ M_L\ M_S$,

   (v) $l_1\ l_2\ s_1\ s_2\ L\ S\ J\ M_J$.

   ¿Podría calcular en forma simple el número de estados en cada caso? [Ayuda: recuerde que para una partícula bajo la acción de un potencial de oscilador armónico tridimensional isótropo se satiface $E_N = \hbar\omega(N + 3/2)$.]

5. Tres partículas idénticas de espín 0 están situadas en los vértices de un triángulo equilatero (ver figura). El eje z es perpendicular al plano del triángulo y pasa por su centro. Todo el sistema puede rotar libremente alrededor de dicho eje. Obtenga restricciones para los valores posibles de J_z.



6. Considere tres partículas idénticas de espín 1 que interactúan débilmente.

(a) Suponga que se sabe que la parte espacial del vector de estado es simétrico respecto del intercambio de cualquier par de partículas. Utilizando la notación $|+\rangle\,|0\rangle\,|+\rangle$ para el caso en que la partícula 1 está en $m_s = 1$, la partícula 2 en $m_s = 0$ y la partícula 3 en $m_s = 1$, construya los estados de espín normalizados en los siguientes tres casos :

   (i) Las tres partículas en el estado $|+\rangle$.

   (ii) Dos de ellas en $|+\rangle$, la otra en $|0\rangle$.

   (iii) Las tres en diferentes estados de espín.

   ¿Cuál es el espín total en cada caso?

(b) Trate de resolver el mismo problema cuando la parte espacial es antisimétrica ante el intercambio de cualquier par de partículas.

7. Suponga que el electrón es una partícula de espín $3/2$ obedeciendo la estadística de Fermi-Dirac. Escriba las configuraciones de un hipotético átomo de Ne ($Z = 10$) hecho de este tipo de electrones (es decir, el análogo de $1s^2\ 2s^2\ 2p^6$). Muestre que la configuración es altamente degenerada. ¿Cuál es el estado fundamental del hipotético átomo de Ne en notación espectroscópica ($^{2S+1}L_j$, donde S, L y J son respectivamente el espín total, el momento angular orbital total y el momento angular total), cuando se tiene en consideración el desdoblamiento por intercambio y el de espín-órbita ?

8. Dos fermiones idénticos de espín $1/2$ se mueven en una dimensión bajo el efecto de un potencial de pozo infinito

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{para } x < 0, x > L \\ 0 & \text{para } 0 \leq x \leq L \ . \end{cases}$$

   (a) Escriba la función de onda y la energía del estado fundamental cuando las dos partículas se encuentran en un triplete de espín.

   (b) Repita (a) cuando las partículas se encuentran en el singlete de espín.

   (c) Suponga ahora que las dos partículas interactúan mutuamente mediante un potencial de corto alcance que puede ser aproximado por

$$V = -\lambda\delta(x_1 - x_2) \ ,$$

   con $\lambda > 0$. Asumiendo que la teoría de perturbaciones es válida para este potencial, discuta que pasa con los niveles de energía obtenidos en (a) y (b).

9. Considere el siguiente modelo unidimensional de molécula de hidrógeno. Dos electrones se mueven en una dimensión sometidos a un potencial de la forma

$$V(x) = V_0[\delta(x-a) + \delta(x+a)] \ ,$$

   donde $V_0 > 0$.

   (a) Resuelva el problema considerando a los electrones indistinguibles.

   (b) Considere ahora un potencial de interacción repulsivo entre ambos electrones, de la forma

$$W(x_1, x_2) = -V_0\delta(x_1 - x_2) \ .$$

   Resuelva el problema a primer orden en la perturbación W analizando las características de la contribución debida a la antisimetrización de la función de onda (término de intecambio).

10. Se tiene un hamiltoniano h con tres niveles de energía 0, $\hbar\omega$, y $2\hbar\omega$. La única degeneración que tienen estos niveles es debida al espín.

(a) Se colocan tres partículas de espín $1/2$ que no interactúan entre sí. El hamiltoniano del sistema de tres fermiones es $H = h(1) + h(2) + h(3)$, donde los números indican las variables de configuración de cada partícula. Halle todos los autovalores y autovectores de H especificando el grado de degeneración de los niveles.

(b) Repita el cálculo para un conjunto de tres bosones de espín 0.

11. Considere cuatro partículas no interactuantes que están descriptas por el hamiltoniano

$$H = h(1) + h(2) + h(3) + h(4) \ ,$$

donde

$$h(i) = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_i^2}{2} \ .$$

(a) Si las partículas son distinguibles, halle los autoestados y energías del sistema. ¿Cuál es la degeneración de los tres estados de menor energía?

(b) Si las partículas son indistinguibles de espín 0, ¿cuáles son los posibles estados físicos y cuál es la degeneración de las energías?

(c) ¿Cuál es el estado fundamental y su degeneración si las partículas tienen espín 1/2?