1. <u>Problema matriz densidad</u>

a) Escribiendo la matriz de Pauli σ_B^x y la identidad para la segunda partícula en forma de $ket-bra$ se llega a que el Hamiltoniano H_{cnot} es

$$H_{cnot} = \hbar\omega_0 \left(|++\rangle\langle+-| + |+-\rangle\langle++| + |-+\rangle\langle-+| + |--\rangle\langle--| \right).$$

Este Hamiltoniano también puede ser escrito en forma de matriz en la base producto $B = \{|--\rangle, |-+\rangle, |+-\rangle, |++\rangle\}$ como

$$H_{cnot} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \hbar\omega_0 U_{cnot}.$$

Esta forma de escribir al operador Hamiltoniano resulta práctica a la hora de encontrar una expresión para el operador evolución temporal, porque al tenerlo expresado de esta manera es fácil ver para las potencias de U_{cnot} que

$$U_{cnot}{}^n = \begin{cases} I & \text{si } n \text{ es par} \\ U_{cnot} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}.$$

Entonces el operador evolución temporal $U = e^{-i\frac{H_{cnot}}{\hbar}t}$ escrito en potencias de $t\omega_0$ es:

$$U = I \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t\omega_0)^{2n}}{2n!} - i\, U_{cnot} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t\omega_0)^{2n+1}}{(2n+1)!} = I\cos(t\omega_0) - i\, U_{cnot}\,\mathrm{sen}(t\omega_0).$$

b) El sistema se encuentra inicialmente en el estado singlete de spin $|\Psi_0\rangle = |00\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$ y el operador evolución temporal a tiempo $\tau = \frac{\pi}{2\omega_0}$ es $U = -i\, U_{cnot}$, por lo que el estado a este tiempo es:

$$|\Psi(\tau)\rangle = -i\, U_{cnot} \left(\frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} \right) = -i \left(\frac{|++\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} \right) = -i \left(\frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes |+\rangle \propto |-, \hat{x}\rangle \otimes |+\rangle.$$

La última manera de expresar $|\Psi(\tau)\rangle$ deja ver que se trata de un estado producto, por lo tanto no corresponde a un estado entrelazado.

c) A tiempo $\tau' = \frac{\pi}{4\omega_0}$ el operador evolución temporal es $U = \frac{1}{\sqrt{2}}(I - i\, U_{cnot})$, y entonces el estado queda

$$|\Psi(\tau')\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} \right) - i \left(\frac{|++\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\Psi_1\rangle - i\, |\Psi_2\rangle \right),$$

donde definí $|\Psi_1\rangle = |00\rangle$ y $|\Psi_2\rangle = |-, \hat{x}\rangle \otimes |+\rangle$ por comodidad.
La matriz densidad del sistema compuesto es $\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|\Psi_1\rangle - i\, |\Psi_2\rangle)(\langle\Psi_1| + i\, \langle\Psi_2|)$ $= \frac{1}{2}(|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + i|\Psi_1\rangle\langle\Psi_2| - i|\Psi_2\rangle\langle\Psi_1|)$, y para obtener la matriz densidad del subsistema A hay que trazar sobre los grados de libertad del sistema B. Esto se puede escribir como $\rho_A = \mathrm{tr}_B(\rho_{AB})$, y haciendo uso de que la traza es lineal podemos escribir a la matriz reducida como

$$\rho_A = \frac{1}{2} \left[\mathrm{tr}_B(|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|) + \mathrm{tr}_B(|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|) + i\, \mathrm{tr}_B(|\Psi_1\rangle\langle\Psi_2|) - i\, \mathrm{tr}_B(|\Psi_2\rangle\langle\Psi_1|) \right].$$

Cada una de las trazas es

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_B(|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|) &= \tfrac{1}{2}\left(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\right) \\
\mathrm{tr}_B(|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|) &= \tfrac{1}{2}\left(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+| - |+\rangle\langle-|\right) \\
\mathrm{tr}_B(|\Psi_2\rangle\langle\Psi_1|) &= \tfrac{1}{2}\left(|-\rangle\langle-| - |+\rangle\langle-|\right) \\
\mathrm{tr}_B(|\Psi_1\rangle\langle\Psi_2|) &= \tfrac{1}{2}\left(|-\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right)
\end{aligned}$$

y

$$\rho_A = \frac{1}{4}\left(2|+\rangle\langle+| \, + \, 2|-\rangle\langle-| + (i-1)|+\rangle\langle-| - (i+1)|-\rangle\langle+|\right).$$

A su vez esta matriz densidad no es de un estado puro porque

$$\rho_A{}^2 = \frac{1}{8}\left(6|+\rangle\langle+| \, + \, 6|-\rangle\langle-| + 4(i-1)|+\rangle\langle-| - 4(i+1)|-\rangle\langle+|\right) \neq \rho_A.$$

Por último el ejercicio pide cuál es la probabilidad de obtener un valor positivo al medir el spin en z, y una manera de hacerlo es a partir de la traza del proyector $|+\rangle\langle+|$ con la matriz densidad,

$$P_+ = \mathrm{tr}(|+\rangle\langle+|\rho_A) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}(2|+\rangle\langle+| + (i-1)|+\rangle\langle-|) = \frac{1}{2}$$