Física Teórica 2

Segundo cuatrimestre de 2013
Guía 6: Suma de momento angular y teorema de Wigner-Eckart

1. Considere una partícula de espín $1/2$ en un estado con $l = 1$.
   (a) Encuentre el estado con j_{max} y $m_{j_{max}}$ en términos de los estados $|l, s, m_l, m_s\rangle$.
   (b) Use $J_- = L_- + S_-$ para generar todos los estados $|j_{max}, m\rangle$.
   (c) Use ortonormalidad para encontrar el estado $|j_{max} - 1, j_{max} - 1\rangle$.
   (d) Use J_- para generar todos los estados $|j_{max} - 1, m\rangle$.
   (e) ¿Cuál es el valor de expectación de L_z en el estado con $j = 1/2$ y $m = 1/2$? ¿Cuál es el valor de expectación de S_z en ese estado?

2. Se intenta sumar impulsos angulares $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$ para formar estados con $j = 2, 1$, y 0. Usando las relaciones de recurrencia, exprese todos los autoestados $\{j, m\}$ (nueve) en términos de los $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$. Escriba su respuesta en la forma

$$|j = 1, m = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |0, +\rangle , \ldots$$

   donde $+$ y 0 representan $m_{1,2} = 1, 0$ respectivamente.

3. Considere dos partículas con espín $1/2$. Calcule todos los coeficientes de Clebsh-Gordan por dos caminos diferentes:
   (a) Escriba los kets correspondientes a los posibles estados de espín en la base de autoestados de S^2 y S_z total (triplete y singlete)

$$|s = 1, m = 1\rangle , \quad |s = 1, m = -1\rangle ,$$
$$|s = 1, m = 0\rangle , \quad |s = 0, m = 0\rangle ,$$

   en función de los kets en la representación $\{m_1, m_2\}$, usando los operadores $S_\pm$ y ortogonalidad.
   (b) Escriba la matriz de 4×4 que corresponde a la representación del operador

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

   en la base $\{m1, m2\}$. Luego encuentre la matriz unitaria que diagonaliza esta matriz. ¿Puede identificar sus elementos?

4. Muestre que la función de onda de un estado con $j = 1$ formado mediante el acoplamiento de dos partículas con espín 0 provenientes de orbitales p, resulta antisimétrica en las coordenadas de las partículas.

5. Incluyendo el acoplamiento espín-órbita, el hamiltoniano electrónico para el átomo de hidrógeno sin campos externos es

$$H = H_0 + \frac{2\mu_B^2}{r^3} \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{\hbar^2} ,$$

   donde $H_0 = p^2/2m - e^2/r$, y $\mathbf{S}$ representa el espín del electrón.

(a) Evalúe los conmutadores

$$\left[H,L^2\right]\ ,\left[H,S^2\right]\ ,\left[H,J^2\right]\ ,[H,L_z]\ ,[H,S_z]\ ,[H,J_z]\ ,$$

donde $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$. ¿Cuál es el conjunto más grande de estos operadores (incluyendo H) que conmutan mutuamente?

(b) Ahora se enciende un campo magnético externo $\mathbf{B}=B\hat{z}$, de modo que se agrega al hamiltoniano el término

$$H_B=\frac{\mu_B}{\hbar}B\left(L_z+2S_z\right)\ .$$

Para este caso, repita el punto (a).

6. * Considere una partícula de espín $1/2$ y masa m, que está sometida a un potencial tipo oscilador armónico tridimensional isótropo

$$V(\mathbf{r})=\frac{m\omega^2r^2}{2}\ ,$$

al que se le añade un potencial de interacción espín-órbita $\gamma\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$, donde $\mathbf{L}$ es el momento angular orbital y $\mathbf{S}$ el espín de la partícula. El hamiltoniano total está dado entonces por

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2r^2}{2}+\gamma\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}\ .$$

(a) Halle exactamente las energías y autoestados de H correspondientes al nivel fundamental y al primer excitado.

(b) Si en $t=0$ el sistema está en $|\varphi\rangle=|N=1,L_z=\hbar,S_z=\hbar/2\rangle$, halle $|\varphi(t)\rangle$. Si en $t=0$ se mide la energía, ¿qué resultado se obtiene? ¿Y si se mide L^2 o L_z? ¿Qué ocurre si las mediciones se realizan a $t>0$?

7. (a) Evalúe

$$\sum_{m=-j}^{j}\left|d^{(j)}_{m,m'}(\beta)\right|^2\ m\ ,$$

para cualquier j (entero o semi-entero). Verifique su respuesta para $j=1/2$.

(b) Pruebe que para cualquier j

$$\sum_{m=-j}^{j}m^2\left|d^{(j)}_{m,m'}(\beta)\right|^2=\frac{1}{2}j(j+1)\sin^2\beta+m'^2\frac{1}{2}(3\cos^2\beta-1)\ .$$

[Ayuda: Esto puede ser probado de muchas maneras. Por ejemplo, puede estudiar las propiedades ante rotaciones de J_z^2 usando el lenguaje de los tensores esféricos irreducibles.]

8. Escriba $d^{(3/2)}$ a partir de $d^{(1)}$, $d^{(1/2)}$, y los coeficientes de Clebsh-Gordan.

9. Considere un sistema formado por dos partículas de espín $1/2$. Un observador A se especializa en medir las componentes de espín de una de las partículas (S_{1x},S_{1y},S_{1z}), mientras que el observador B mide las componentes de espín de la otra partícula. Suponga que se sabe que el sistema está en un estado singlete de espín, es decir que $S_{total}=0$.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el observador A obtenga $S_{1z}=\hbar/2$ cuando el observador B no efectúa mediciones? Repita el cálculo para $S_{1x}=\hbar/2$.

(b) El observador B determina con certeza que la partícula 2 se encuentra en un estado $S_{2z}=\hbar/2$. ¿Qué puede decir sobre el resultado de la medición de A si: (i) A mide S_{1z}, (ii) A mide S_{1x}? Justifique su respuesta.

10. Considere un tensor esférico de rango 1 (es decir, un vector)

$$V_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{V_x \pm i V_y}{\sqrt{2}}, \quad V_0^{(1)} = V_z \ .$$

Usando la expresión para $d^{(j=1)}$ dada en el problema 18 de la guía 5, evalúe

$$\sum_{q'} d_{qq'}^{(1)}(\beta) V_{q'}^{(1)} \ , \tag{1}$$

y muestre que sus resultados son los que esperaría de las propiedades de transformación de $V_{x,y,z}$ ante rotaciones respecto del eje y.

11. Demuestre que el producto de dos tensores irreducibles $T_q^{(k)}$ y $W_p^{(h)}$, de rango k y h respectivamente, no es un tensor irreducible sino una combinación lineal de ellos. Proceda del siguiente modo: demuestre, usando las propiedades de transformación ante rotaciones, que

$$Z_m^{(j)} = \sum_{q,p} T_q^{(k)} W_p^{(h)} \langle kh, qp | jm \rangle$$

es un tensor irreducible de rango j, luego invierta esta expresión utilizando la relación de completitud de los coeficientes de Clebsh-Gordan. Muestre que el producto de dos vectores $\mathbf{V}$ y $\mathbf{U}$ se puede escribir como la suma de un escalar, otro vector y un tensor esférico de rango 2. Escriba explícitamente las componentes del vector y el tensor esférico de rango 2 en términos de las componentes $U_{x,y,z}$ y $V_{x,y,z}$. En particular, si $\mathbf{V} = \mathbf{U} = \mathbf{R}$ es el operador posición, muestre que el tensor de rango 2 que se obtiene es, a menos de un factor, el operador momento cuadrupolar eléctrico.

12. (a) Considere una partícula sin espín ligada a un centro fijo mediante de un potencial central. Relacione lo mas posible los elementos de matriz

$$\left\langle n', l', m' \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) \right| n, l, m \right\rangle \quad \text{y} \quad \langle n', l', m' | z | n, l, m \rangle \ ,$$

utilizando unicamente el teorema de Wigner-Eckart. Esté seguro de establecer correctamente qué elementos de matriz son no nulos.

(b) Repita el punto (a) usando funciones de onda $\Phi(x) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$.

13. (a) Escriba xy, xz, y $(x^2 - y^2)$ como componentes de un tensor esférico (irreducible) de rango 2.

(b) El valor de expectación

$$Q = e \left\langle \alpha, j, m = j \left| \left(3z^2 - r^2\right) \right| \alpha, j, m = j \right\rangle$$

es conocido como el momento cuadrupolar. Evalúe

$$e \left\langle \alpha, j, m' \left| \left(x^2 - y^2\right) \right| \alpha, j, m = j \right\rangle \ ,$$

(donde $m' = j, j-1, j-2, \ldots$) en función de Q y los coeficientes de Clebsch-Gordan apropiados.

14. El tensor cuadrupolar de un sistema se define como

$$Q_{ik} = e \left(3 x_i x_k - \delta_{ik} r^2\right) \ .$$

Si el sistema está en un estado con un valor de impulso angular total j, el momento cuadrupolar definido en el ejercicio anterior corresponde al valor de expectación de Q_{zz} en el estado con $m = j$. Evalúe los valores de expectación restantes sobre los estados $|\alpha, j, m = j\rangle$. Interprete el resultado.

15. Probar que un núcleo atómico de espín 0 o $1/2$ tiene momento cuadrupolar eléctrico nulo (el espín de un núcleo es el momento angular resultante de los espines y momentos angulares relativos de los nucleones constituyentes).

16. Un núcleo de espín $3/2$ situado en el origen es sometido a un campo eléctrico inhomogéneo. La interacción eléctrica cuadrupolar básica se puede tomar como :

$$H_{int} = \frac{eQ}{2s(s-1)\hbar^2}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 S_x^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 S_y^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 S_z^2\right] ,$$

donde ϕ es el potencial electrostático que satisface la ecuación de Laplace, y los ejes de coordenadas se eligen de manera que

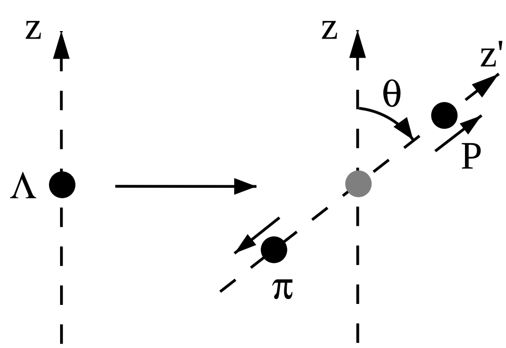
$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)_0 = 0 .$$

Muestre que la energía de interacción puede ser escrita como

$$A(3S_z^2 - S^2) + B(S_+^2 + S_-^2) ,$$

y exprese A y B en función de $\partial^2\phi/\partial x^2$ y demás derivadas parciales. Determine los autoestados de energía (en términos de $|m\rangle$, donde $m = \pm 3/2, \pm 1/2$) y los correspondientes autovalores. ¿Hay alguna degeneración?

17. La partícula Λ^0 (espín $1/2$) se desintegra en un protón (espín $1/2$) y un mesón π^- (espín 0) mediante una interacción débil. Inicialmente Λ^0 tiene $S_z = \hbar/2$, y las partículas producto de la desintegración salen formando un ángulo θ con el eje z (ver figura).



(a) Usando la conservación del impulso angular total, diga que valores de S_z del protón se pueden medir luego de la desintegración, cuando $\theta = 0$.

(b) Para un valor arbitrario de θ, calcule la probabilidad de medir $S_{z'} = \hbar/2$ y $S_{z'} = -\hbar/2$ para la partícula Λ^0 respecto al eje z'.

(c) Suponga que la probabilidad de que Λ^0 con $S_z = \hbar/2$ se desintegre en un protón emitido en la dirección $+z$ está dada por a_+, mientras que a_- corresponde a la probabilidad del decaimiento en el caso $S_z = -\hbar/2$. Usando (b) escriba la probabilidad de que luego del decaimiento el protón salga formando un ángulo θ con el eje z. ¿Qué ocurre si $a_+ = a_-$? Interprete.

(d) Experimentalmente la probabilidad de que el protón salga formando un ángulo θ con el eje z está dada por

$$P(\theta) \approx C(1 - 0{,}62\cos\theta)$$

Obtenga a_+ y a_-. Interprete.