Física Teórica 2 (2011 - 1C)

Primer Parcial

P1. Considere un sistema cuyo hamiltoniano está dado por $H = h_0 \left(|1\rangle \langle 3| + |2\rangle \langle 2| + |3\rangle \langle 1| \right)$. Suponga que el estado del sistema está dado por $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle \right)$.
a) Se mide la energía de ese sistema. ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidad?
b) ¿Cuál es el estado después de la medición?
c) Escriba un operador con algún autovalor degenerado que, en conjunto con el Hamiltoniano, forme un conjunto completo de observables que conmutan (CCOC).
d) Si sobre el estado original del sistema, se mide el observable planteado en el punto anterior ¿qué resultados pueden obtenerse? ¿Con qué probabilidad se obtendrá cada uno?

P2. El Hamiltoniano de una partícula con masa m y carga e en un campo magnético constante $B\mathbf{z}$, cuyo movimiento está restringido al plano xy es:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \omega \hat{L}_z$$

con $\omega = \frac{e}{2mc}B$. Introduciendo los operadores $\hat{a}_x$ y $\hat{a}_y$, y operando de manera análoga al oscilador armónico unidimensional puede obtenerse:

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + 1) - \omega \hat{L}_z$$

$$\hat{L}_z = i\hbar(\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y)$$

Dados los operadores $\hat{a}_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x - i\hat{a}_y)$, $\hat{a}_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + i\hat{a}_y)$, $\hat{N}_r = \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r$ y $\hat{N}_l = \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l$:
a) Reescriba $\hat{H}$ y $\hat{L}_z$ en término de estos operadores (puede usar: $[\hat{a}_r, \hat{a}_r^\dagger]$=$[\hat{a}_l, \hat{a}_l^\dagger]$=1, los conmutadores entre operadores l y r son nulos).
b) Usando la representación de Heisenberg, muestre que $\hat{L}_z$ es una constante de movimiento.
c) Escriba los autovalores de $\hat{H}$ y de $\hat{L}_z$. Muestre que $\hat{H}$ y $\hat{L}_z$ forman un CCOC. **Sugerencia:** puede resultar útil trabajar en la base de autokets de $\hat{N}_r$ y $\hat{N}_l$.
d) ¿Cuál es la acción de $\hat{a}_r^\dagger$ y de $\hat{a}_l^\dagger$ sobre los autoestados de $\hat{H}$ y $\hat{L}_z$?

P3. Considere un haz de partículas de spin 1 que ingresa en un sistema de medición consistente en tres aparatos Stern Gerlach (SG) mostrado en la figura. El campo magnético del primero está en la dirección $\mathbf{z}$ y se deja pasar solo partículas con $S_z = \hbar$.

El segundo SG, orientado según la dirección $\mathbf{n}$, en el plano xz y formando un ángulo $\beta = \pi/4$ con el eje $\mathbf{z}$, deja pasar solo las partículas con $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \hbar$. El haz resultante ingresa a un tercer SG orientado en dirección $\mathbf{z}$ y deja pasar solo partículas con $S_z = -\hbar$.

a) Calcule las matrices que representan S_z y S_x en la base $\{|s, m_z>\}$ =$\{|1,1>, |1,0>, |1,-1>\}$. Calcule la representación de $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ en dicha base.
b) Calcule el estado en que se encuentran las partículas al salir del SG2 en la base $\{|s, m_z>\}$.
c) Aplique la matriz de rotaciones en la base $\{|s, m_z>\}$:

$$e^{-iL_y\beta/\hbar} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos(\beta) & -\sqrt{2}\sin(\beta) & 1-\cos(\beta) \\ \sqrt{2}\sin(\beta) & 2\cos(\beta) & -\sqrt{2}\sin(\beta) \\ 1-\cos(\beta) & \sqrt{2}\sin(\beta) & 1+\cos(\beta) \end{pmatrix}$$

sobre el estado $|1,1>$ para $\beta = \pi/4$. Compare con el estado calculado en b).
d) ¿Qué fracción de las partículas que atraviesan el primer SG continua luego del tercer SG?

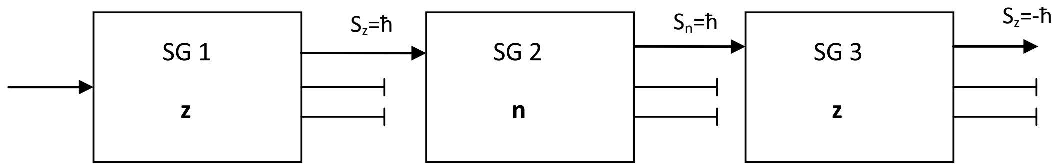

Figure 1: