1. Ejercicio 6 guía 6

El hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m^2\omega^2 r^2}{2} + \gamma \vec{L} \cdot \vec{S} \tag{1}$$

La idea es usar:

- Que conocemos los autoestados y autovalores del oscilador armónico etiquetados por el número de ocupación $N = n_x + n_y + n_z$.

- El álgebra de los operadores de momento angular $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$ y el álgebra de los operadores de creación y destrucción $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$.

Las energías del oscilador armónico son $E_N = \hbar\omega(N + 3/2)$. Por otro lado el término extra se puede escribir como

$$H_\gamma = \frac{\gamma}{2}(J^2 - L^2 - S^2) = \frac{\gamma}{2}(J^2 - L^2 - \frac{3}{4}) \tag{2}$$

Esto implica que las energías del sistema completo dependen de N, J^2 y L^2. Vamos a asumir que son los estados con $N = 0$ y $N = 1$ los que nos piden que consideremos como “primeros excitados”. En realidad estados con N muy grande pueden tener energías comparables con la del fundamental en este sistema. Pero se puede pensar que γ es pequeño y en ese caso podemos despreocuparnos de que el acople del impulso angular con el spin imponga corrimientos significativos de las energías del oscilador armónico.

Se puede comprobar que las componentes del impulso angular en términos de los operadores de creación y destrucción,

$$L_i = -i\hbar\epsilon_{ijk}a_j^\dagger a_k \tag{3}$$

satisfacen las relaciones de conmutación ya mencionadas.

Uno puede comprobar que el hamiltoniano del oscilador armónico, $H = \hbar\omega(N + 3/2)$, conmuta con las componentes del impulso angular:

$$[L_i, N] = \sum_{n=x,y,z} [L_i, a_n^\dagger a_n] = 0, \tag{4}$$

por lo tanto los autoestados que ya conocemos del oscilador armónico, $|n_x, n_y, n_z\rangle$, formarán mediante combinaciones lineales, autoestados de los operadores de impulso angular. La pregunta del millón es si los autestados con L^2 definido y aquellos con N definido tienen alguna relación. Para esto veamos cómo se relacionan de estos operadores:

$$\begin{aligned} L^2 &= -\hbar^2\epsilon_{ijk}\epsilon_{inm}a_j^\dagger a_k a_n^\dagger a_m \\ &= \hbar^2(\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{kn}\delta_{jm})a_j^\dagger a_k a_n^\dagger a_m \\ &= \ldots = \hbar^2 N(N+1) - \hbar^2 a_j^\dagger a_j^\dagger a_k a_k. \end{aligned} \tag{5}$$

Entonces vemos que el operador L^2 es casi el operador N, salvo por ese segundo término con dos operadores de creación a la izquierda y dos operadores de destrucción a la derecha. Si consideramos solamente los estados $|N=0\rangle$ y los tres $|N=1\rangle$ entonces

$$L^2|N\rangle = \hbar^2 N(N+1)|N\rangle = \hbar^2 l(l+1)|N\rangle, \qquad \text{para} \quad N=0,1. \tag{6}$$

Por lo que en estos casos $N=l$, y entonces $N=0$ implica $l=0$ y $N=1$ implica $l=1$. De esta manera vemos que el estado fundamental del oscilador armónico tiene impulso angular nulo y los estados de ocupación 1 del oscilador armónico tienen impulso angular 1. Lo que no sucede es que los elementos de la base $|n_x\, n_y\, n_z\rangle$ sean del tipo $|lm_l\rangle$. Hay que formar combinaciones lineales de la base $|n_x\, n_y\, n_z\rangle$ que sean autoestados de L_z con $l=1$. Para esto hacemos lo usual, buscamos el estado de peso máximo: $L_+|1\,1\rangle = 0$. En general,

$$|1\,1\rangle = c_x|1_x, 0_y, 0_z\rangle + c_y|0_x, 1_y, 0_z\rangle + c_z|0_x, 0_y, 1_z\rangle \tag{7}$$

ya que está formado por estados de número de ocupación 1 (N=1). El operador $L_+ = L_x + iL_y$ se escribe

$$L_+ = -(a_x^\dagger + ia_y^\dagger)a_z + a_z^\dagger(a_x + ia_y), \tag{8}$$

por lo que $L_+|1\,1\rangle = 0$ implica $c_x = -ic_y$ y $c_z = 0$. O sea

$$|1\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger + ia_y^\dagger)|0\rangle. \tag{9}$$

Luego aplicando $L_- = L_x - iL_y$ a este estado se obtienen los restantes $|1\,0\rangle$ y $|1\,-1\rangle$ en término de los autoestados del oscilador armónico.