Física Teórica II, 1-2014
Práctica 1: Sistemas de dimensión 2

El estado de polarización de un fotón se puede describir por un vector en un espacio vectorial complejo de dimensión 2. En el se pueden definir las bases $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$ y $\{|R\rangle, |L\rangle\}$, correspondientes a polarización lineal en x e y, polarización lineal en x' e y' y polarización circular. Los productos escalares entre los vectores de estas bases están en la siguiente tabla:

	x	y	x'	y'	R	L
x	1	0	$\cos(\theta)$	$-\sin(\theta)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
y		1	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$-\frac{i}{\sqrt{2}}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}$
x'			1	0	$\frac{\exp(-i\theta)}{\sqrt{2}}$	$\frac{\exp(i\theta)}{\sqrt{2}}$
y'				1	$-\frac{i\exp(-i\theta)}{\sqrt{2}}$	$\frac{i\exp(i\theta)}{\sqrt{2}}$
R					1	0
L						1

1. Sea el estado $|\psi\rangle = \frac{(1+i)}{2}|R\rangle + \frac{(1-i)}{2}|L\rangle$

   a) ¿Está polarizado circularmente? Si es así, ¿es ésta polarización R o L?

   b) ¿Está polarizado linealmente? ¿En qué eje?

2. A partir de la relación de completitud de la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, verifique la de $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$ y la de $\{|R\rangle, |L\rangle\}$.

3. Considere el operador tal que $|x'\rangle = \hat{R}(\theta)|x\rangle$ y $|y'\rangle = \hat{R}(\theta)|y\rangle$

   a) Escriba la representación vectorial de $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}, \{|R\rangle, |L\rangle\}$, en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$. Encuentre la representación matricial del operador $\hat{R}(\theta)$ en la misma base.

   b) Encuentre los autoestados y autovalores de $\hat{R}(\theta)$.

   c) Aplicando $\hat{R}(\pi/2)$ sobre $|x'\rangle$ muestre que obtiene $|y'\rangle$.

4. Para un estado arbitrario $|\psi\rangle$, diga cuáles de las siguientes propiedades son ciertas siempre, a veces o nunca. Además, diga cuáles dependen de cómo se elige el factor arbitrario de fase.

   a) $|\langle x|\psi\rangle|^2 + |\langle y|\psi\rangle|^2 = 1$.

   b) $\langle x|\psi\rangle$ es real.

   c) $\langle x|\psi\rangle$ y $\langle x'|\psi\rangle$ son reales.

   d) $\langle x|\psi\rangle$ y $\langle R|\psi\rangle$ son reales.

   e) Existe un $|\phi\rangle$ tal que $\langle\phi|\psi\rangle = 0$.

   f) $|\langle x|\psi\rangle|^2 + |\langle R|\psi\rangle|^2 = 1$.

   g) Si $|\langle x|\psi\rangle|^2 = |\langle y|\psi\rangle|^2$, entonces $|\langle x'|\psi\rangle|^2 = 1/2$ para todo θ.

   Interprete los que pueda en término de los experimentos de polarización y cristales birrefringentes.

5. Sea x' un eje orientado en $\theta = 30$ respecto a x, y un haz de fotones orientados en un estado de polarización lineal ψ tal que $|\langle y|\psi\rangle| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

   a) Se hace pasar el haz por los siguientes 3 proyectores:

   $$Detector \ \leftarrow y' \ \leftarrow R \ \leftarrow y \ \leftarrow \psi$$

   Calcular la probabilidad de transmisión.

   b) Repetir el cálculo si se invierten las direcciones:

   $$Detector \ \leftarrow y \ \leftarrow R \ \leftarrow y' \ \leftarrow \psi$$

   c) Repetir los cálculos si se reemplazan los polarizadores R por polarizadores L.

6. Sea un haz con N fotones por segundo descriptos por el siguiente estado de polarización:

   $$|\psi\rangle = c(3\,|x\rangle + 4i\,|y\rangle)$$

   a) ¿Qué fracción de los fotones pasarán en promedio por un polarizador y?

   b) ¿Qué fracción de los fotones pasarán en promedio por un polarizador x' (orientado en un ángulo θ respecto a x)?

   c) Cuando un fotón está polarizado en R lleva un momento angular $\hbar$ respecto de su dirección de movimiento. Si su polarización es L ejerce el mismo momento angular, pero orientado en la dirección opuesta. Si el haz descripto por el estado ψ es absorbido totalmente por una superficie, ¿qué torque se ejercerá sobre la misma?

   d) ¿Qué se observa cuando se envía un solo fotón y éste es absorbido por la superficie (suponiendo que tiene un instrumento suficientemente delicado para medirlo)?

7. Los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son autoestados de la componente z del espín con autovalor $\pm\hbar 2$. Diga cómo actúan los operadores S_x y S_y sobre estos dos estados. Verifique que $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k$ y $\{S_i, S_j\} = (\hbar^2/2)\delta_{ij}$.

8. Las matrices de Pauli σ_j son tales que $S_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$. Demuestre que la forma explícita de estas matrices en la base de autoestados de σ_z es

   $$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Halle sus autovalores y autovectores.

   b) Demuestre que cumplen las siguientes propiedades

   $$\begin{aligned} det(\sigma_k) &= -1 \\ Tr(\sigma_k) &= 0 \\ \sigma_i^2 &= I \\ \sigma_j\sigma_k &= i\epsilon_{jkl}\sigma_l + I\delta_{jk} \\ (\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) &= \vec{a}\cdot\vec{b}\ I + i\ (\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{\sigma} \end{aligned}$$

   donde I es la matriz identidad, ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi–Civita y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

9. El Hamiltoniano de un sistema de espín 1/2 es $H = \frac{\hbar\Omega}{2\sqrt{2}}(\sigma_z+\sigma_x)$. Encuentre los autovalores y los autovectores.

10. Dado un versor $\hat{n}$ y el operador $P_n = \frac{1}{2}(I + \hat{n}\cdot\vec{\sigma})$

    a) Demuestre que $P_n^2 = P_n$ (y por lo tanto P_n es un proyector).

    b) Demuestre que $\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\, P_n = P_n$.

    c) Demuestre que para todo estado $|\psi\rangle$ se cumple que $P_n|\psi\rangle$ es un autoestado del operador $\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$ con autovalor $+1$.

11. Usando los resultados del problema anterior encuentre los autoestados de $\hat{a}\cdot\vec{\sigma}$ (con $\hat{a}$ un versor cualquiera). Demuestre que si medimos la componente S_a y luego la componente S_b, la probabilidad de obtener $S_b = \hbar/2$ dado que obtuvimos $S_a = \hbar/2$ es $P(+,+) = (1 + \hat{a}\cdot\hat{b})/2$.

12. Usando los resultados del problema anterior encuentre el producto escalar entre un autoestado de $\vec{b}\cdot\vec{\sigma}$ y los autoestados de $\vec{a}\cdot\vec{\sigma}$.

13. Un sistema de espín 1/2 está en un autoestado de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ con autovalor $\hbar/2$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo γ con el eje positivo z.

    a) Suponga que se mide S_x. ¿Cuál es la probabilidad de obtener $\hbar/2$?

    b) Evalúe la dispersión de S_x, es decir $\left\langle (S_x - \langle S_x\rangle)^2 \right\rangle$. Verifique el resultado para los casos $\gamma = 0$, $\pi/2$ y π.

    Nuevamente interprete los resultados geométricamente y recuerde que los kets son vectores en un espacio de Hilbert.

14. Un haz de átomos de espín 1/2 es sometido a una serie de mediciones del tipo Stern-Gerlach en la siguiente manera:

    a) La primera medición acepta átomos con $s_z = \hbar/2$ y rechaza átomos con $s_z = -\hbar/2$.

    b) La segunda medición acepta átomos con $s_n = \hbar/2$ y rechaza con $s_n = -\hbar/2$, donde s_n es el autovalor del operador $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ con $\hat{\mathbf{n}}$ en el plano xz y formando un ángulo β con el eje z.

    c) Una tercera medición acepta $s_z = -\hbar/2$ y rechaza $s_z = \hbar/2$.

    ¿Cuál es la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$ si el haz $s_z = \hbar/2$ que pasa la primera medición está normalizado a uno? ¿Cómo se debe orientar el segundo aparato de medición para maximizar la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$?

15. Usando el *laboratorio* virtual `http://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/archiv/inhalt_materialien/interferometer/interferometer.zip`
    diseñe y realize experimentos que permitan concluir que:

    a) La luz es una onda.

    b) La luz está compuesta de partículas.

c) ¿Hay algun experimento que muestre ambos comportamientos de la luz?

16. (Para pensar) Si al *laboratorio* del problema anterior se incorporan los siguientes elementos ópticos: divisores de haz polarizantes (PBS, que transmiten perfectamente fotones polarizados horizontalmente y reflejan perfectamente fotones polarizados verticalmente), láminas de cuarto de onda y de media onda (que introducen un desfasaje en $\pi/2$ y π entre dos estados que corresponden a polarizaciones ortogonales como $|x\rangle$ e $|y\rangle$). Diseñe un conjunto de experimentos en los que, en algún momento, un haz de fotones se desdoble en sus dos componentes circularmente polarizadas y a partir del cual pueda deducirse que cada fotón no sigue un camino bien definido en su viaje desde la fuente hasta el detector. Discuta un experimento análogo realizado con aparatos de Stern Gerlach.