Física Teórica II
Práctica 2: Formalismo
Parte I: Espacios de estados de dimensión finita.

1. Considere dos vectores $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ de un espacio vectorial $\mathcal{H}$. Suponga que el conjunto $B = \{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \ldots, |a_N\rangle\}$ es una base de $\mathcal{H}$ y que conoce todos los productos $\langle a_1|\alpha\rangle$, $\langle a_2|\alpha\rangle$, ... y $\langle a_1|\beta\rangle$, $\langle a_2|\beta\rangle$, ...

   a) Encuentre la representación matricial del operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en la base B.

   b) Para un sistema de espín 1/2 y con $|\alpha\rangle = |0_z\rangle$ y $\beta = |0_x\rangle$ (donde los estados $|0_n\rangle$ y $|1_n\rangle$ denotan, respectivamente a los autoestados de $\vec{n}\cdot\vec{S}$ con autovalor $\pm\hbar/2$)

      1) Escriba explícitamente la matriz del operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en la base de autoestados de S_z.

      2) Transforme esta matriz a la base de autoestados de S_x utilizando la matriz de cambio de base.

2. $\{|1\rangle\,, |2\rangle\}$ son dos vectores en un espacio de dimensión 2. Diga cuales condiciones son suficientes, cuáles son necesarias y cuales irrelevantes para asegurar la ortonormalidad de esos vectores:

   a) $\langle 1|2\rangle = 0$.

   b) $|\langle 1|x\rangle|^2 + |\langle 2|x\rangle|^2 = 1$.

   c) $|\langle 1|\phi\rangle|^2 + |\langle 2|\phi\rangle|^2 = 1$ para todo $|\phi\rangle$.

   d) Existe un $|\phi\rangle$ tal que $\langle 1|\phi\rangle = 0$ y $\langle 2|\phi\rangle = 0$.

   e) Para todo $|\phi\rangle$ existen constantes a y b tal que $|\phi\rangle = a\,|1\rangle + b\,|2\rangle$

   f) Al menos uno de los productos $\langle 1|R\rangle$ y $\langle 2|R\rangle$ es complejo.

3. Suponga que $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son autoestados de algún operador hermítico A. ¿Bajo qué condiciones se puede concluir que $|i\rangle + |j\rangle$ también es autoestado de A? Justifique.

4. Considere un operador hermítico A, no degenerado cuyos autovalores son a'

   a) Pruebe que $\prod_{a'}(A - a')$ es el operador nulo.

   b) ¿Cuál es el significado del operador $\prod_{a''\neq a'} \frac{(A-a'')}{(a'-a'')}$ para un a' dado?

   c) Escriba estos dos operadores para el caso de un sistema de espín 1/2 con $A = S_z$

5. Considere el observable A cuya matriz es

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

   a) Encuentre la base ortonormal de autovectores de A y diga cuales son los correspondientes autovalores. ¿Hay degeneración?.

6. Sean A y B dos observables. Suponga que los autovectores comunes de A y B $\{|a', b'\rangle\}$, forman una base ortonormal ¿Se puede siempre concluir que $[A,\, B] = 0$? Si su respuesta es sí, pruébela; si es no, dé un contraejemplo. (Se hace en la teórica).

7. Sea $|\phi\rangle$ un autoestado de A con autovalor a. Demuestre que si A y B anticonmutan entonces $B|\phi\rangle$ es autoestado de A con autovalor $-a$. En el caso de una sistema de spín 1/2 aplique este resultado para calcular $S_i|0_j\rangle$ para todo par de direcciones ortogonales $i \neq j$.

8. Considere dos observables A_1 y A_2 que no conmutan entre sí ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero ambos conmutan con el hamiltoniano H ($[A_1, H] = [A_2, H] = 0$). Pruebe que los autoestados de H deben ser degenerados. ¿Hay excepciones? Como ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales $H = p^2/2m + V(r)$, con $A_1 \to L_z$ y $A_2 \to L_x$.

9. Considere un sistema físico cuyo espacio de estados tiene una base $B = \{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$. En esta base, las matrices de los operadores $\hat{H}$ y $\hat{B}$ son

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde ω_0 y b son constantes reales.

a) Diga si $\hat{H}$ y $\hat{B}$ son hermíticos y si estos operadores conmutan. En ese caso, construya una base de autovectores comunes a ambos operadores.

b) ¿Cuáles de los conjuntos $\{\hat{H}\}$, $\{\hat{B}\}$, $\{\hat{H}, \hat{B}\}$, $\{\hat{H}^2, \hat{B}\}$ son CCOC?

10. Considere operadores A, B y C tales que, ara una base $B = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ cumplen:

$$A|u_1\rangle = |u_1\rangle; A|u_2\rangle = 0; A|u_3\rangle = -|u_3\rangle$$

$$B|u_1\rangle = |u_1\rangle; B|u_2\rangle = |u_2\rangle; B|u_3\rangle = |u_3\rangle$$

$$C|u_1\rangle = i|u_2\rangle; C|u_2\rangle = -i|u_1\rangle + i|u_3\rangle; C|u_3\rangle = -i|u_2\rangle$$

$$D|u_1\rangle = i|u_2\rangle; D|u_2\rangle = i|u_1\rangle + i|u_3\rangle; D|u_3\rangle = -i|u_2\rangle$$

a) Diga cual de estos operadores son observables.

b) Enumeren los CCOC que pueden construirse y digan cuales son sus autoestados comunes.

c) Dos de estos observables no conmutan. Elija uno y diga qué valores podrían obtenerse al medirlo para un estado cualquiera. Si luego se mide el otro observable, ¿qué valores podrían obtenerse?.

11. Sean A y B, dos operadores que conmutan con $[A, B]$. Demostrar que

$$[A^m, B] = mA^{m-1}[A, B].$$

Use esta propiedad para demostrar que

$$[f(A), B] = \frac{df(A)}{dA}[A, B].$$

12. Considerar los operadores A, L y $A(s)$, siendo s un parámetro real o complejo

$$A(s) \equiv e^{sL} A e^{-sL}.$$

Demostrar:

a) $\frac{dA(s)}{ds} = [L, A(s)]$

b) $\frac{d^2A(s)}{ds^2} = [L, [L, A(s)]]$

c) $\frac{d^3A(s)}{ds^3} = [L, [L, [L, A(s)]]]$

Utilice esto para expandir $\hat{A}(1)$ en una serie de Taylor, y demostrar que

$$e^L A e^{-L} = A + L, A] + \frac{1}{2!}[L, [L, A]] + \frac{1}{3!}[L, [L, [L, A]]] + \ldots$$

13. Sean A y B, dos operadores que conmutan con $[A, B]$. Demostrar que

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

Ayuda:

a) Mostrar que $[e^{\eta A}, B] = \eta e^{\eta A}[A, B]$

b) Definimos $g(\eta) \equiv e^{\eta A} e^{\eta B} e^{-\eta(A+B)}$. Demostrar que la derivada es: $\frac{dg}{d\eta} = \eta[A, B]g$.

c) Integrar la ecuación anterior.

14. Considere que los operadores B_1, B_2, ..., B_N son tales que $[B_j, [B_k, B_l]] = 0$ para todos los valores de $j, k, l = 1, ..., N$ (o sea: cada operador conmutan con el conmutador de cualquier par de operadores). Demuestre que entonces vale la siguiente identidad (puede hacerlo por inducción):

$$\exp(B_1)\exp(B_2)...\exp(B_N) = \exp(\sum_{j=1}^{N} B_j + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{j}[B_k, , B_j]/2)$$

15. *a*) Considere un operador tal que $A^2 = I$ (dé un ejemplo concreto de un operador de ese tipo). Demuestre que para todo número real o complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha A) = \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha))I + \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))A$$

En particular muestre que: $\exp(-i\alpha A) = \cos\alpha\ I -\ i\ A \sin\alpha$.

b) Demuestre que para todo número real o complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha B) = f(0)I + (\frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha)) - f(0))B^2 + \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))B$$

Considere un operador B tal que $B^3 = B$ (¿podría encontrar un ejemplo?). En particular muestre que:

$$\exp(-i\alpha B) = I + (\cos\alpha - 1)B^2 - i \operatorname{sen}\alpha B$$

16. Usando las reglas del álgebra de bra-ket, pruebe o evalúe los siguientes items:

a) $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$ y $\mathrm{Tr}(XYZ) = \mathrm{Tr}(ZXY)$, donde X,Y y Z son operadores.

b) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

c) Calcule $\exp[if(A)]$ en forma de ket-bra, donde A es un operador hermítico cuyos autovalores son conocidos.

Parte II: Espacios de dimensión infinita. El caso continuo.

17. *a*) Considere los siguientes operadores construidos a partir de la base continua $\{|x\rangle, -\infty \leq x \leq \infty\}$: $P_{I_j} = \int_{x \in I_j} dx\ |x\rangle\langle x|$ donde I_j es un intervalo del eje real. Calcule los productos $P_{I_j} P_{I_k}$. Indique si los operadores P_{I_j} son proyectores. Indique en que caso vale $P_{I_j} P_{I_k} = 0$. Indique si los operadores $|x\rangle\langle x|$ son proyectores.

    b) Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{n}{2} \exp(-n|x|)$ converge (calcule la norma de la diferencia entre dos elementos consecutivos y demuestre que tiende a cero cuando $n \to \infty$). ¿Converge a una función?

    c) Suponga que $f(A)$ es una función de un operador hermítico A cuyos autovectores son $|\phi_j\rangle$. Encuentre la matriz de $f(A)$ en otra base $|\tilde{\phi}_k\rangle$ suponiendo que conoce la matriz de cambio de base entre $|\phi_j\rangle$ y $|\tilde{\phi}_k\rangle$.

18. *a*) Sea x y p_x la coordenada y el momento de una partícula que se mueve en una dimensión. Evalúe el corchete de Poisson clásico $\{x, F(p_x)\}_{PB}$.

    b) Sean ahora x y p_x los correspondientes operadores cuánticos. Evalúe el conmutador $[x,\, F(p_x)]$ y aplique el resultado para el caso $F(p_x) = \exp(ip_x a/\hbar)$.

    c) Usando el resultado de anterior, demuestre que el estado $|\phi\rangle = \exp(\frac{ip_x a}{\hbar})|x'\rangle$ (con $x|x'\rangle = x'|x'\rangle$) es un autoestado del operador x. ¿Cuál es el correspondiente autovalor?

19. *a*) Demuestre las igualdades

$$[x_i,\, F(\mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad [p_i,\, G(\mathbf{x})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i}$$

    para cualquier par de funciones F y G que puedan ser expresadas en serie de potencias de su argumento.

    b) Calcule $[x^2, p^2]$. Compare su resultado con el corchete de Poisson clásico $\{x^2, p^2\}_{PB}$.

20. Pruebe lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle p'|x|\alpha\rangle &= i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \langle p'|\alpha\rangle \\ \langle \beta|x|\alpha\rangle &= \int dp' \psi^*_\beta(p') i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \psi_\alpha(p') \end{aligned}$$

    donde $\psi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ y $\psi_\beta(p') = \langle p'|\beta\rangle$ son las funciones de onda en el espacio de momentos.