Física Teórica II
Práctica 3: Postulados

1. Considere un sistema de spin 1 (con un espacio de estados de dimensión 3) y los siguientes operadores

$$L_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Verifique que los autovalores del operador L_j $(j = x, y, z)$ son $m_j = 1, 0, -1$ (en unidades de $\hbar$). Diga cuales son los correspondientes autovectores). Demuestre que estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación $[L_j, L_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}L_l$. Diga si todos o alguno de estos operadores forman un CCOC.

   b) Suponga que tiene a su disposición tres tipos de aparatos de Stern Gerlach que separan un haz entrante en tres haces cada uno correspondiendo a los autovalores de m_x, m_y y m_z. Diga como utilizar estos aparatos para medir L_x, L_y y L_z.

   c) Suponga que prepara un estado con $m_x = 0$ y mide L_z, cuales son los valores posibles y cuales son sus probabilidades. Qué sucede si a continuación mide L_x nuevamente? (cuales son los resultados posibles y cuales sus probabilidades).

2. Considere el mismo sistema que en el problema anterior y calcule los operadores L_x^2, L_y^2 y L_z^2.

   a) Diga cuales son sus autovalores y autovectores. Demuestre que estos operadores forman un CCOC. Cuál es la base común de autovectores?

   b) Suponga que prepara un estado con $m_x = 0$ y mide L_z^2. Cuales son los valores posibles y sus probabilidades? Que sucede si el estado inicial es tal que $m_y = 0$? y si es $m_z = 1$?

   c) Discuta cómo se puede hacer para medir simultaneamente los tres operadores L_x^2, L_y^2 y L_z^2. . Diseñe un instrumento que mida estos operadores usando los aparatos de Stern Gerlach que separan el haz de acuerdo a los valores de L_j (recuerde que el proceso de separación de un haz en tres, que es efectuado aplicando un campo magnético apropiado, puede ser revertido totalmente).

3. En el laboratorio A se preparan partículas de espín 1/2 en uno de dos estados: el estado $|\phi\rangle$, que es autoestado de $\vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ con autovalor +1 y el estado $|\psi\rangle$, que es autoestado de $\vec{b} \cdot \vec{\sigma}$ con autovalor +1 (ambos estados son preparados con igual probabilidad). Las partículas son enviadas al laboratorio B (de modo tal que su estado no cambia durante el viaje desde A hasta B). Cada vez que recibe una partícula, un observador desea distinguir si el se trata del $|\phi\rangle$ o de $|\psi\rangle$. Discuta si existe una estrategia posible para cumplir con esta tarea, para versores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ arbitrarios. Suponga que B se conforma con distinguir los estados con una cierta probabilidad midiendo $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$: si obtiene +1 lo asocia con el estado $|\phi\rangle$ y si obtiene −1, con el estado $|\psi\rangle$. Se define la probabilidad de éxito por la probabilidad de: medir +1 y que la partícula esté en $|\phi\rangle$ ó medir −1 y que la partícula esté en $|\psi\rangle$. ¿Cual es la estrategia que debe seguir para maximizar la probabilidad de éxito?. Demuestre que la máxima probabilidad éxito es $P_{max} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 - \vec{a} \cdot \vec{b})})$. Interprete el resultado.

4. El observador A envía partículas de espín 1/2 hacia el laboratorio donde se encuentra el observador B. Las partículas son preparadas eligiendo al azar entre autoestados de S_x o de S_z. Suponga que los estados no se modifican durante el viaje desde A hasta B. El observador en el laboratorio B elige al azar entre medir S_x o medir S_z. Suponga que A y B repiten muchas veces esta procedimiento. Ambos anotan en un cuaderno de laboratorio cual fue el estado preparado (A) y cual fue el estado medido (B).

   a) ¿Cual es la probabilidad de que los resultados de A y B coincidan? (o sea, ¿cual es la probabilidad de que en un dado renglón de sus cuadernos A y B tengan anotado el mismo resultado?).

   b) Suponga que una vez repetido este procedimiento muchas veces, A anuncia públicamente, para cada evento, si el estado enviado era autoestado de S_z o de S_x. ¿Cual es la probabilidad de que los resultados de A y B coincidan si B midió el mismo observable preparado por A? ¿Y si midió un observable distinto? Si A y B tienen por objetivo compartir una secuencia aleatoria de bits. Pueden usar este procedimiento para lograrlo?

   c) ¿Pueden A y B estar seguros de que esa secuencia es conocida sólo por ellos? Discuta qué sucede si hay un observador que intercepta las partículas cuando van desde A hacia B. ¿Pueden A y B descubrirlo?

   d) Interesados en el uso de estas ideas para distribución cuántica de claves pueden leer el trabajo de C. Bennett y G. Brassard.
   `http://materias.df.uba.ar/ft2a2014c1/files/2014/03/BB84.pdf`

5. Considere una situación como la del problema anterior con la siguiente diferencia: El observador A envía partículas de espín 1/2 preparadas eligiendo al azar entre autoestados de autovalor $+1$ de S_x o de S_z (¿cómo puede hacer esto?). El observador B elige al azar entre medir S_x o S_z. ¿Cual es la probabilidad de que B pueda descubrir cual es el estado que A le envió? Explique en que casos eso es posible. Suponga que luego de repetir esto muchas veces, B anuncia públicamente en que eventos ha identificado el estado enviado por A. ¿Puéden A y B usar este esquema para compartir una secuencia aleatoria de bits? ¿Cómo deben proceder? (Opcional: ¿que pasa si hay un observador que intercepta los espines que van desde A hacia B?). Este protocolo fue propuesto por C. Bennett en Phys. Rev. Lett, **68** 3121 (1992).
   `http://materias.df.uba.ar/ft2a2014c1/files/2014/03/bennett92.pdf`

6. Demostrar la desigualdad de Schwarz, que dice que si $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son dos vectores arbitrarios en el mismo espacio vectorial, entonces

$$\langle\alpha|\alpha\rangle\,\langle\beta|\beta\rangle \geq |\,\langle\alpha|\beta\rangle\,|^2,$$

   y la igualdad sólo se produce si estos vectores son proporcionales. (Se hace en la teórica).

7. (Se hace en la teórica, usar notacion $(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$) Para dos observables $\hat{A}$ y $\hat{B}$ y un estado cualquiera, pruebe la desigualdad de Heisenberg generalizada (también llamado principio de indeterminación o incertidumbre) establece que

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4}\,|\langle[A,B]\rangle|^2 + K^2(A,B)\ ,$$

   donde: $(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$ y $K(A,B) = \frac{1}{2}\langle\{A,B\}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$.

8. Verifique que la función de onda de un paquete gaussiano, dada por

$$\langle x'|\alpha\rangle = (2\pi d^2)^{-1/4} \exp\left[\frac{i\,\langle p\rangle\, x'}{\hbar} - \frac{(x' - \langle x\rangle)^2}{4d^2}\right]$$

satisface la relación de incerteza mínima

$$\Delta x\ \Delta p = \frac{\hbar}{2}\ .$$

Muestre que también se cumple la condición $\langle x'|(x - \langle x\rangle|\alpha\rangle = c\,\langle x'|p - \langle p\rangle|\alpha\rangle$, donde c es un número imaginario.

9. Demuestre que el paquete de onda Gaussiano del problema anterior es el único estado que satisface la condición $\Delta x \Delta p = \hbar/2$.

10. Analice las implicancias del Principio de Indeterminación para el caso de un sistema de espín 1/2.

    a) Demuestre que para un estado cualquiera se verifica que

$$(\Delta S_j)^2 = \frac{\hbar^2}{4}(1 - \langle\sigma_j\rangle^2) \quad \text{y} \quad K(S_j, S_k) = \frac{\hbar^2}{4}(\delta_{j,k} - \langle\sigma_j\rangle\langle\sigma_k\rangle). \qquad (1)$$

    b) Demuestre que el principio de indeterminación generalizado se deduce que $\sum_j \langle\sigma_j\rangle^2 \leq 1$. ¿Existe algún estado $|\psi\rangle$ que no satisface la igualdad?

    c) Utilice los resultados anteriores para demostrar que si el estado satisface $\Delta S_j = 0$ entonces: $\langle S_k\rangle = 0$ para $j \neq k$ y $K(S_j, S_k) = 0$, para todo k.

    d) Demuestre que para cualquier estado $|\psi\rangle$ de un sistema de espín 1/2 existe algún λ complejo tal que se cumple la condición: $(\sigma_x - \langle\sigma_x\rangle)|\psi\rangle = \lambda(\sigma_y - \langle\sigma_y\rangle)|\psi\rangle$. Encuentre λ para el estado mas general.

11. Represente el estado de un sistema de espín 1/2 como un vector en una esfera unitaria donde las coordenadas son $x_j = \langle\sigma_j\rangle$. (Se hace en la teórica). Interprete geométricamente la relación de incertidumbre generalizada. ¿Cuál es el significado geométrico de las dispersiones $\Delta\sigma_j$?.

12. Evalúe $\Delta x\ \Delta p$ para cualquiera de los autoestados del Hamiltoniano de una partícula confinada en un pozo unidimensional

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$