Física Teórica II, 1-2014
Práctica 4: Sistemas Compuestos

1. Considere dos partículas A y B ambas de espín 1/2 preparadas en los siguientes estados: a) $|\Psi\rangle_{A,B} = (|01\rangle + |10\rangle + |00\rangle)/\sqrt{3}$ (donde $|0\rangle$ y $|1\rangle$ denotan los autoestados de σ_z con autovalor $+1$ y -1 respectivamente) y b) $|\phi\rangle = (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)/2$. Para cada uno de estos estados:

   a) Calcule la matriz densidad del sistema compuesto.

   b) Calcule las matrices densidad reducidas de los subsistemas A y B (ρ_A y ρ_B).

   c) Calcule las purezas de ambos subsistemas $\mathrm{Tr}(\rho_A^2)$ y $\mathrm{Tr}(\rho_B^2)$. Interprete el resultado.

   d) Encuentre la descomposición de Schmidt de ambos estados. Diga cuanto vale el número de Schmidt en cada caso. Diga si los estados son entrelazados.

2. Considere la base de Bell, formada por los estados $B_B = \{|\Phi_+\rangle, |\Phi_-\rangle, |\Psi_+\rangle, |\Psi_-\rangle\}$, donde $|\Phi_\pm\rangle = (|00\rangle \pm |11\rangle)/\sqrt{2}$ y $|\Psi_\pm = (|01\rangle \pm |10\rangle)/\sqrt{2}$.

   a) Demuestre que aplicando cualquier operador de Pauli local (o sea, un operador del tipo $\sigma_j^{(B)} \equiv I \otimes \sigma_j$ o $\sigma_j^{(A)} \equiv \sigma_j \otimes I$) a cualquier estado de Bell, se obtiene un estado ortogonal al anterior.

   b) Calcule el valor medio de estos operadores en cualquier estado de Bell.

   c) Considere los operadores $M_1 = \sigma_x \otimes \sigma_x$ y $M_2 = \sigma_z \otimes \sigma_z$. Demuestre que estos operadores forman un CCOC y que los autoestados comunes son los vectores de la base de Bell. Cuales son los correspondientes autovalores? (se hace en la teórica)

   d) Calcule el valor medio de cualquier operador de la forma $K_{jk} = \sigma_j \otimes \sigma_k$ para $j, k = x, y, z$ en cualquiera de los estados de Bell (piense antes de hacer cuentas).

3. Considere los operadores $N_1 = \sigma_x \otimes \sigma_z$ y $N_2 = \sigma_z \otimes \sigma_x$. Diga si forman un CCOC y en ese caso encuentre la base común de autovectores.

4. Los operadores $I \otimes I$, $\sigma_j \otimes I$, $I \otimes \sigma_j$ y $\sigma_j \otimes \sigma_k$ (con $j, k = x, y, z$) forman una base ortogonal del espacio de operadores lineales de 4×4 (demuestre la ortonogonalidad usando el producto de Hilbert Schmidt definido como $(\hat{A}, \hat{B}) = \mathrm{Tr}(\hat{A}^\dagger B)$). Use los resultados del problema anterior para escribir los proyectores sobre cualquiera de los estados de Bell como combinación lineal de esos operadores.

5. Suponga que se prepara a un sistema de dos espines en el estado $|\Psi_-\rangle$ (también llamado estado singlete) y que ambas partículas son llevadas a laboratorios distantes (llamados A y B) de modo tal que el estado del conjunto A, B no se modifica durante el viaje. Suponga que en el laboratorio A se mide el observable $\sigma_a = \vec{a} \cdot \vec{\sigma}^{(A)}$ y en el laboratorio B se mide $\sigma_b = \vec{b} \cdot \vec{\sigma}^{(B)}$.

   a) Calcule las siguientes probabilidades $\mathrm{Prob}(\sigma_a = \pm 1)$, $\mathrm{Prob}(\sigma_b = \pm 1)$ (probabilidades de cada subsistema), $\mathrm{Prob}(\sigma_a = \pm 1, \sigma_b = \pm 1)$, $\mathrm{Prob}(\sigma_a = \mp 1, \sigma_b = \pm 1)$ (probabilidades conjuntas).

b) Calcule la función de correlación entre los experimentos realizados en A y en B definida como $K(A,B) = \langle\sigma_a \otimes \sigma_b\rangle - \langle\sigma_a\rangle\langle\sigma_b\rangle$ (el valor medio del producto menos el producto de los valores medios).

c) Repita el cálculo para otro estado de Bell, por ejemplo: $|\Phi_+\rangle$. Cuales son las diferencias y cuales las similitudes entre ambos resultados. Interprete.

6. Considere un estado compuesto por dos sistemas de espín 1/2 (A y B). Suponga que ambas partes se separan tal como en el problema anterior. Demuestre que para cualquier estado del sistema (A,B) se satisface la siguiente condición sobre las probabilidades (marginales) para los resultados de las mediciones en el laboratorio A: Para todo versor $\vec{a}$ elegido en A y versor $\vec{b}$ elegido en B vale que $\text{Prob}(\sigma_a = \epsilon_a) = \sum_{\epsilon_b} \text{Prob}\big(\sigma_a = \epsilon_a; \sigma_b = \epsilon_b\big)$ (donde $\epsilon_{a,b} = \pm 1$). O sea, la probabilidad de obtener un resultado en A es siempre independiente del observable que se mide en B. Esta condición es denominada "no signalling". Discuta el motivo por el cual la validez de esta condición asegura que es imposible usar las propiedades de los estados entrelazados para enviar información a velocidades mayores que la luz entre A y B.

7. Suponga que se prepara a un sistema de dos espines en el estado $|\Psi_-\rangle$ y que ambas partículas son llevadas a laboratorios distantes (llamados A y B). Suponga que los versores $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ y $\vec{n}_3$ son tales que forman entre si un ángulo de 120 grados entre si (o sea, cumplen que $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 = 0$). Suponga que en A y en B se elige (de manera independiente y al azar) medir la componente del espín en la dirección $\vec{n}_j$.

   a) Calcule la probabilidad conjunta $\text{Prob}(\sigma_j^{(A)} = +1, \sigma_k^{(B)} = +1)$. Repita el cálculo para otras combinaciones de resultados $(+1,-1)$, etc.

   b) Suponga que este procedimiento se repite muchas veces (o sea: A y B reciben sus partículas, que siempre fueron preparadas en el estado $|\Psi_-\rangle$, eligen una dirección $\vec{n}_j$, miden la componente del espín y registran el resultado). Demuestre que la probabilidad de que los resultados registrados por A y B sean iguales es $P(A=B) = 1/2$.

8. Recordando los conceptos aprendidos en F4: Invente un ejemplo de un estado de una partícula (por ejemplo, un electrón en un átomo de hidrógeno, una partícula con espín en un pozo de potencial, etc) en el que el grado de libertad de espín esté entrelazado con los grados de libertad orbitales. ¿Cual es el número de Schmidt máximo en ese caso?

9. *Optativo*. Entrelazamiento de estados mixtos. Considere un sistema de dos partículas de espín 1/2 preparadas en un estado con la siguiente matriz densidad:
   $\rho_{AB} = \frac{1-p}{4}\, I \otimes I + p\, |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|$. Diga si este estado puede estar entrelazado para algún valor de p.
   Ayuda. Considere que un estado mixto de dos subsistemas A y B es separable (no está entrelazado) si $\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B$. En este caso la matriz transpuesta parcial con respecto a B (o a A) $\rho_{AB}^{T_B} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^{B^T}$ también corresponde a un estado físico, y por consiguiente sus autovalores deben ser positivos. Si los autovalores de $\rho_{AB}^{T_B}$ no son todos positivos entonces ρ_{AB} es un estado entrelazado (cierto en sistemas 2×2, 2×3 y 3×2).

10. La siguiente (pseudo) paradoja fue propuesta por D. Mermin (*Am. J.Phys.* **58**, *731 (1990)* ver copia en `http://materias.df.uba.ar/ft2a2014c1/files/2014/04/Mermin90.pdf` o *Phys. Rev. Lett.* **65** *3373 (1990)*). Considere un sistema de 3 partículas de espín 1/2 (A,

B y C) que se preparan en el estado $|\Psi\rangle = (|000\rangle - |111\rangle)/\sqrt{2}$. Cada partícula es llevada a un laboratorio distante de modo tal que el estado del conjunto no se modifica durante el viaje.

a) Muestre que $|\Psi\rangle$ es un autoestado de los siguientes operadores: $O_1 = \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y$, $O_2 = \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y$, $O_3 = \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x$ y $O_4 = \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x$. Diga cuales son los autovalores correspondientes.

b) Suponga que en cada laboratorio se mide σ_x obteniendose los valores $m_x^{(A)}$, $m_x^{(B)}$ y $m_x^{(C)}$. ¿Cuanto vale el producto de estos tres valores medidos?

c) Suponga en cambio que en cada laboratorio se toma la decisión (de manera independiente y aleatoria) de medir σ_x o σ_y. Considere un experimento en el cual dos observadores miden σ_y y uno mide σ_x. ¿Cuanto vale el producto de los tres resultados?

d) Nuestro sentido común nos indica que el resultado de la medición de σ_x en A no puede depender de cual haya sido el observable que midieron B y C. Discuta este argumento.

e) Si se convenció de la validez de la afirmación anterior note que puede razonar del mismo modo para B y C (o sea, los valores medidos en B no pueden depender de lo que decidan medir A y C, etc).

f) En consecuencia, si los valores medidos de σ_j en cada laboratorio los denominamos $m_j^{(A,B,C)} = \pm 1$ debemos concluir que $m_x^{(A)} m_y^{(B)} m_y^{(C)} = +1$ $m_y^{(A)} m_x^{(B)} m_y^{(C)} = +1$ y $m_y^{(A)} m_y^{(B)} m_x^{(C)} = +1$. Es esto compatible con la igualdad $m_x^{(A)} m_x^{(B)} m_x^{(C)} = -1$?

g) Discuta si lo anterior es muestra una inconsistencia de la mecánica cuántica o símplemente ilustra su contradicción con nuestro sentido común (recuerde la consigna: *los experimentos que no se realizan no tienen resultados* y encuentre el argumento *contrafáctico* en la formulación de la paradoja).

11. Correlaciones clásicas. Considere una tiza (obviamente clásica) que está inicialmente en reposo respecto de algún sistema de referencia. En un dado instante la tiza estalla y se rompe en dos fragmentos. Uno sale despedido hacia el laboratorio A y el otro se dirige hacia el laboratorio B. En lo que sigue debe tener en cuenta que, debido a la conservación del momento angular total durante la explosión, si un fragmento tiene momento angular $\vec{J}$, el otro fragmento debe tener momento angular $-\vec{J}$. El mecanismo que produce el estallido no privilegia ninguna dirección en el espacio. Es decir, cada vez que la tiza estalla, los fragmentos salen despedidos con momentos angulares $\vec{J}$ y $-\vec{J}$, donde la dirección del vector $\vec{J}$ está uniformemente distribuida sobre una esfera.

    En el laboratorio A se mide el signo de la componente del momento angular del fragmento en la dirección $\vec{a}$ (obviamente, $\sigma_a = sign(\vec{J}_1 \cdot \vec{a})$ y puede valer ± 1). Análogamente, en el laboratorio B se mide el signo de la componente del momento angular del otro fragmento en la dirección $\vec{b}$ ($\sigma_b = sign(\vec{J}_2 \cdot \vec{b})$ y puede valer ± 1).

    a) Calcule cual es la probabilidad de que en ambos laboratorios se obtengan resultados iguales o resultados distintos (o sea, calcule las probabilidades conjuntas $\text{Prob}(\sigma_a = \pm 1, \sigma_b = \pm 1)$ y $\text{Prob}(\sigma_a = \pm 1, \sigma_b = \mp 1)$). Exprese el resultado en función del ángulo entre los versores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

b) Suponga que ahora se realiza un experimento tal como el descripto en el Problema 7: En ambos laboratorios se elige al azar una de tres direcciones $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ o $\vec{n}_3$ para medir el signo de la componente del momento angular del fragmento respectivo. Las tres direcciones forman ángulos de 120 grados entre si y por lo tanto $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 = 0$. Calcule las probabilidades $\mathrm{Prob}(\sigma_j^{(A)} = \pm 1, \sigma_k^{(B)} = \pm 1)$ y $\mathrm{Prob}(\sigma_l^{(A)} = \pm 1, \sigma_k^{(B)} = \mp 1)$ (donde $\sigma_k^{(A)} = \vec{n}_k \cdot \vec{J}$, etc.).

c) El experimento se repite muchas veces y los observadores en A y B registran los resultados para cada medición (cada uno de los cuales proviene de un estallido diferente). Demuestre que la probabilidad total de que en A y B se registren resultados diferentes es $\mathrm{Prob}(A \neq B) = 5/9$ y que la probabilidad de obtener resultados iguales es $\mathrm{Prob}(A = B) = 4/9$. Compare este resultado con el obtenido en el problema 7. Piense donde se origina la diferencia entre estos resultados (esto será discutido en la teórica mas adelante!).