Física Teórica II, 1-2014

Práctica 6: Dinámica

Parte I: Dinámica de sistemas discretos.

1. Sea un sistema con un espacio de estados de tres dimensiones, del cual $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ es una base ortonormal. Las matrices del Hamiltoniano H y los operadores A y B en esa base son

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} \hbar 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

donde ω_0, a, y b son constantes positivas. En $t = 0$ el estado del sistema es $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$.

   a) En $t = 0$ se mide H. ¿Qué valores pueden encontrarse y con que probabilidad? Calcule $\langle H\rangle$ y $\langle \Delta H\rangle$ para el estado $|\psi(0)\rangle$.

   b) Si en $t = 0$ en lugar de medir H se mide A, ¿Qué resultados pueden obtenerse y con qué probabilidad? ¿Cuál es el estado inmediatamente después de la medida? Repita el cálculo si en lugar de A se mide B.

   c) Si en $t = 0$ no se midió nada, calcule $|\psi(t)\rangle$. Repita el cálculo si se midió: (i) H, (ii) A, o (iii) B. Discuta, en cada caso, qué resultados se obtendrían si se midiese A al instante t. Idem para: (i) H, y (ii) B.

2. (Se hace en la teórica) Sean $|\varphi_1\rangle$ y $|\varphi_2\rangle$ autoestados del hamiltoniano H de dimensión 2 con autovalores E_1 y E_2 respectivamente. En $t = 0$ el estado es $|\psi_1\rangle = a_1|\varphi_1\rangle + a_2|\varphi_2\rangle$.

   a) Encuentre el valor medio de un observable B arbitrario en función del tiempo.

   b) Diga en que casos el valor medio es constante.

   c) Diga cuanto valen $\langle H\rangle$ y $\langle \Delta H\rangle$ a todo tiempo.

3. El Hamiltoniano de un sistema de espín 1/2 en un campo magnético B (que apunta en la dirección del eje z) es,

$$H = -\left(\frac{e}{mc}\right)\vec{B}\cdot\vec{S} = \omega S_z .$$

   a) Suponga que en $t = 0$ el estado del sistema es $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ (notar que este es un autoestado de S_x). Calcule el estado $|\psi(t)\rangle$ para todo tiempo t.

   b) Si en el instante t se mide S_x: cuales son los resultados posibles y sus respectivas probabilidades.

   c) Calcule el valor de expectación $\langle S_x\rangle$ en función del tiempo (*precesión del espín*).

   d) Diga si el estado a tiempo t es autoestado de alguna componente del espín $\vec{n}\cdot S$.

4. Para un sistema de espín 1/2 en un campo magnético orientado en el eje z (tal como en el problema anterior):

   a) Escriba y resuelva las ecuaciones de Heisenberg para los operadores $S_x(t)$, $S_y(t)$ y $S_z(t)$.

b) Calcule los valores medios de estos operadores. Represente al estado del espín mediante un vector en una esfera unitaria (esfera de Bloch) y diga cómo se mueve el vector en función del tiempo.

c) Encuentre el operador de evolución temporal para el espín.

5. Una caja conteniendo una partícula es dividida en dos compartimientos (izquierdo y derecho) usando un separador fino. Si se sabe que la partícula está del lado derecho (izquierdo) el estado se representa por el vector $|R\rangle$ ($|L\rangle$) (notar que se desprecian variaciones espaciales dentro de cada mitad de la caja). El estado más general es

$$|\alpha\rangle = |R\rangle \langle R|\alpha\rangle + |L\rangle \langle L|\alpha\rangle$$

donde $\langle R|\alpha\rangle$ y $\langle L|\alpha\rangle$ son las componentes del mismo en la base $|L\rangle$, $|R\rangle$. Suponga que la partícula puede *tunelear* a través del separador y que este efecto puede describirse aproximadamente por el hamiltoniano

$$H = \Delta\left(|L\rangle \langle R| + |R\rangle \langle L|\right)$$

donde Δ es un número real con dimensiones de energía.

a) Encuentre los autoestados de energía normalizados. ¿Cuáles son los autovalores de energía correspondientes?

b) Encuentre la matriz del operador de evolución temporal y utilícela para calcular el estado a todo tiempo si el estado en $t = 0$ es $|R\rangle$.

c) En el caso anterior: ¿Cuál es la probabilidad de observar a la partícula en el lado izquierdo como función del tiempo?

d) Resuelva ahora la ecuación de Schrödinger y verifique que obtiene el mismo resultado encontrado en (b).

6. (RMN: Se hace en la teórica) Considere una partícula de espín 1/2 en un campo magnético homogeneo que depende del tiempo: $\vec{B}(t) = B_0\hat{z} + B_1(\hat{x}\cos(\omega t) + \hat{y}\sin(\omega t))$.

a) Verifique que el Hamiltoniano es

$$H = \omega_0 S_z + g(S_x \cos(\omega t) + S_y \sin(\omega t))$$

b) Resuelva la ecuación de Schrödinger y halle el estado del espín en función del tiempo.

c) Si en $t = 0$ se prepara al sistema en el estado $|0\rangle$ (autoestado de S_z de autovalor +1), diga cual es la probabilidad de obtener $S_z = -\hbar/2$ en función del tiempo. Interprete

7. (Raman) Considere un átomo de tres niveles cuyo Hamiltoniano es $H_0 = E_e |e\rangle\langle e| + E_{g_1} |g_1\rangle\langle g_1| + E_{g_2} |g_2\rangle\langle g_2|$. El átomo es irradiado por dos laseres de frecuencias ω_1 y ω_2 Uno de los láseres acopla los estados $|e\rangle$ y $|g_1\rangle$ mientras que el otro acopla los niveles $|e\rangle$ y $|g_2\rangle$. Los niveles $|g_1\rangle$ y $|g_2\rangle$ no están acoplados directamente por ningún laser. El Hamiltoniano de interacción entre el átomo y los láseres puede aproximarse como $H_{int} = \hbar\Omega_1 |e\rangle\langle g_1| \exp(-i\omega_1 t) + \hbar\Omega_2 |e\rangle\langle g_2| \exp(-i\omega_2 t) + h.c.$. Los láseres tienen la misma desintonía, es decir, son tales que $\delta = (E_e - E_{g_1})/\hbar - \omega_1 = (E_e - E_{g_2})/\hbar - \omega_2$.

a) Resuelva la ecuación de Schrödinger y encuentre el estado del sistema $|\Psi(t)\rangle$.
Sugerencia: use la representación de interacción y, antes de proseguir, encuentre un estado $|\chi\rangle_{int} = \lambda_1 |g_1\rangle_{int} + \lambda_2 |g_2\rangle_{int}$ que se acopla con $|e\rangle_{int}$ por medio de un campo externo oscilante. Esto es, reduzca este problema al problema anterior.

b) Considere que en $t = 0$ el estado es $|\Psi(0)\rangle = |g_1\rangle$. Calcule la probabilidad de encontrar al sistema en los tres autoestados de H_0 para tiempos posteriores. Analice exhaustivamente el caso en el que ambos láseres tienen igual intensidad ($\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$) y la desintonía δ es alta $\delta \gg \Omega$ (efecto Raman). Demuestre que el sistema oscila coherentemente entre los niveles $|g_1\rangle$ y $|g_2\rangle$ tal como lo haría si estos niveles estuvieran acoplados directamente por un láser. Encuentre la frecuencia de oscilación.

Parte II: Dinámica de sistema continuos.

8. Considere una partícula libre unidimensional. En t_0 el estado satisface la relación de incertidumbre mínima mínima $\Delta x \Delta p = \hbar/2$.

a) Encuentre, usando el teorema de Ehrenfest o las ecuaciones de Heisenberg, las ecuaciones de evolución para $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$.

b) Use las ecuaciones de Heisenber para encontrar los valores medios $\langle x^2\rangle$, $\langle p^2\rangle$ y $\langle\{x, p\}\rangle$ en función del tiempo.

c) Encuentre la dispersión en posición y demuestre que vale

$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle = \frac{\langle(\Delta p)_0^2\rangle}{m^2} t^2 + \left\langle (\Delta x)_0^2 \right\rangle \ ,$$

donde $\langle(\Delta x)_0^2\rangle$ y $\langle(\Delta p)_0^2\rangle$ son las dispersiones en el instante inicial. Interprete el resultado y discuta como usarlo para describir la evolución de un paquete de ondas.

9. Sea $x(t)$ el operador posición para una partícula libre en una dimensión. Evalúe $[x(t), x(0)]$.

10. Considere una partícula en un potencial unidimensional $V(x) = -kx$ (por ejemplo, puede corresponder a un campo gravitatorio o a un campo eléctrico uniforme).

a) Escriba el teorema de Ehrenfest para los valores medios de la posición x y el momento p de la partícula. Integre las ecuaciones y compare con el resultado clásico.

b) Muestre que la dispersión $\langle(\Delta p)^2\rangle$ no varía en el tiempo.

c) Escriba la ecuación de Schrödinger en la representación $\{|p\rangle\}$. Deduzca luego una relación entre $\partial_t |\langle p|\psi(t)\rangle|^2$ y $\partial_p |\langle p|\psi(t)\rangle|^2$. Integre la ecuación e interprete.

11. Considere una partícula en tres dimensiones cuyo hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \ .$$

a) Calculando $[\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}, H]$ obtenga

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{m} \right\rangle - \langle \mathbf{x}\cdot\nabla V\rangle \ .$$

Para identificar la relación anterior con el análogo en mecánica cuántica del teorema del virial, resulta esencial que el miembro izquierdo sea nulo. ¿Bajo qué condición ocurre ésto?

b) Para este caso en particular, considere un potencial homogéneo de grado α, es decir $V(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^\alpha V(\mathbf{x})$. Analice los casos particulares $\alpha = -1$ (potencial de Coulomb) y $\alpha = 2$ (oscilador armónico).

c) ¿Es el operador $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}$ hermítico? Repita el cálculo realizado en (a) para $[\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}, H]$. ¿Puede construir un análogo cuántico del producto clásico $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}$ que sea hermítico?