Física Teórica II, 1-2014
Práctica 7: Oscilador Armónico

1. Considere un oscilador armónico en una dimensión.

    a) Usando
    $$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,$$
    $$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$
    evalúe $\langle m|x|n\rangle$, $\langle m|p|n\rangle$, $\langle m|\{x,p\}|n\rangle$, $\langle m|x^2|n\rangle$ y $\langle m|p^2|n\rangle$.

    b) Compruebe que se cumple el teorema del virial para los valores de expectación de la energía cinética y potencial tomados con respecto a un autoestado de la energía.

2. Utilizando los resultados del ejercicio anterior, muestre que los autoestados del oscilador armónico unidimensional satisfacen la siguiente relación $\Delta x \Delta p = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar$ ¿Qué ocurre para $n = 0$? ¿Qué condición impone esto sobre la función de onda del estado fundamental?

3. Para el oscilador armónico unidimensional:

    a) Resuelva la ecuación de Heisenberg para los operadores posición y momento. Obtenga y resuelva las ecuaciones de evolución para los valores medios $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$.

    b) Usando los resultados obtenidos encuentre el estado en la representación de Schrödinger si $|\psi(0)\rangle$ es un autoestado de la posición. Encuentre cuál es el estado para cada tiempo de la forma $t = n\,T/4$ (donde T es el período del oscilador clásico).

4. Encuentre las funciones de onda de los autoestados del oscilador armónico $\phi_n(x) = \langle x|n\rangle$. Obtenga primero la función de onda del estado fundamental usando que este satisface $a|0\rangle = 0$. Luego encuentre las funciones de onda de los estados excitados usando que estos son tales que $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$ (se explica en la teórica pero es importante que hagan aquí todas las cuentas obteniendo $\phi_n(x)$ en forma explícita).

5. Considere el estado fundamental $|0\rangle$ y primer estado excitado $|1\rangle$ de un oscilador armónico en una dimensión. Sin hacer ninguna integral:

    a) Encuentre un estado que sea combinación lineal de estos dos y maximice $\langle x\rangle$.

    b) Considere que en $t = 0$ el estado es el encontrado en el punto anterior. Evalúe el valor de expectación $\langle x\rangle$ y la dispersión Δx como función del tiempo.

6. Considere un oscilador armónico al que se le aplica una fuerza externa constante. El Hamiltoniano del sistema es $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - F\,x$. Deduzca y resuelva las ecuaciones de Heisenberg para los operadores a y $a^\dagger$.

7. Los estados coherentes de un oscilador armónico son autoestados del operador de aniquilación a tales que $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

    a) Encuentre los valores medios $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$ en función de α.

    b) Demuestre que $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$ (se hace en la teórica).

c) Demuestre que la expresión anterior también puede escribirse como: $|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle$. Qué interpretación tiene el operador $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$.

d) Demuestre que estos estados verifican la relación de mínima incerteza (se hace en la teórica).

e) Calcule el producto escalar entre dos estados coherentes $\langle\alpha|\beta\rangle$.

f) Demuestre que si el estado inicial del sistema es un estado coherente $|\alpha_0\rangle$ entonces el estado sigue siendo un estado coherente para todo tiempo.

8. Considere un oscilador armónico en un estado coherente $|\lambda\rangle$

   a) ¿Cuales son los valores posibles que se obtienen si se mide la energía?. ¿Cuales son las probabilidades para cada uno de estos autovalores? Grafique la distribución de probabilidades obtenida y verifique que corresponde a una distribución de Poisson.

   b) Calcule el valor medio de la distribución de Poisson y el de la energía $\langle H\rangle$. Interprete el resultado (qué relación hay entre el valor medio de la distribución y el Hamiltoniano del sistema evaluado en los valores medios de la posición y momento.

9. Considere el estado (un gato de Schrödinger) formado por una superposición de dos estados coherentes; $|\psi\rangle = N(|\alpha\rangle + \ |-\alpha\rangle)$

   a) Calcule el factor de normalización N.

   b) Calcule y grafique cualitativamente las probabilidades $|\langle x|\psi\rangle|^2$ y $|\langle p|\psi\rangle|^2$.

   c) Calcule los valores medios $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$

10. Considere un oscilador armónico forzado con una fuerza periódica periódica en el tiempo. Suponga que el Hamiltoniano es $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - \hbar f_0(a\ e^{i\omega_0 t} + a^\dagger\ e^{-i\omega_0 t})$. Resuelva la ecuación de Heisenberg para los operadores a y $a^\dagger$. Demuestre que si el estado inicial es un estado coherente, el estado sigue siendo coherente a todo tiempo. Encuentre ese estado a menos de una fase, considerando los casos i) $\omega_0 \neq \omega$ y ii) $\omega_0 = \omega$.

11. Considere una partícula en una dirección. En $t = 0$ el estado es $|\psi(0)\rangle = (|0\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$ donde $|0\rangle$ y $|2\rangle$ son autoestados del Hamiltoniano del oscilador armónico $\hat{H}\,|n\rangle = \hbar\omega(n + 1/2)\,|n\rangle$.

    a) Para este caso:

       1) Calcule la evolución temporal de este estado y encuentre el tiempo más corto en el cual el sistema llega a un estado ortogonal al inicial.
       2) Calcule las dispersiones Δx y Δp para todo tiempo.

    b) Considere el mismo estado inicial para una partícula libre (con $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$). Para este caso:

       1) Calcule e integre las ecuaciones de movimiento para los operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$.
       2) Calcule las dispersiones $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle$ y $\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$ para todo tiempo, a partir del mismo estado inicial.