Física Teórica II, I-2014, Juan Pablo Paz
Práctica 10: Momento angular y Problemas 3D

1. Construya los armónicos esféricos Y_1^m. Para ello, resuelva primero $L_+ Y_1^1 = 0$ (L_+ en la representación $\vec{r}$) y aplique luego el operador L_- a Y_1^1 (previamente normalizado) para hallar los otros dos restantes. Usando la matriz de rotaciones, escriba la combinación lineal de estos estados que es autoestado de L_y con autovalor $\hbar$. Verifique su resultado aplicándole L_y en la representación $\vec{r}$.

2. La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por:
$$\Psi(\vec{r}) = (x + y + 3\,z)\, f(r)$$
   a) ¿Es Ψ autofunción de L^2? Si es así, ¿cuál es el valor de l? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2 ?

   b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?

3. La parte angular de la función de onda de un rotor rígido con un Hamiltoniano $H = \mathbf{L}^2/2I$ esta dada por
$$\langle \hat{\mathbf{n}} | \psi(0) \rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta \sin\phi \tag{1}$$
   a) Halle $\langle \hat{\mathbf{n}} | \psi(t) \rangle$. *Sugerencia*: exprese la función de onda en términos de los $Y_{l,m}$.

   b) Si se mide L_z. ¿Qué valores pueden obtenerse y con que probabilidad?

   c) ¿Cuál es el valor de $\langle L_x \rangle$?

   d) Si ahora se mide L_x. ¿Qué resultados pueden obtenerse y con que probabilidad?

4. Consideren un oscilador armónico tridimensional descripto por el Hamiltoniano
$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2} m \left[\omega_\perp^2 x_3^2 + \omega_\parallel^2 (x_1^2 + x_2^2) \right]$$
   Muestre que L_3 conmuta con H y por ende es una constante de movimiento, sin embargo no es así para L_1 y L_2. ¿Qué puede decir de L^2?

5. Sean $\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$ las soluciones del átomo de hidrógeno. Sean $R_{nl} = \frac{u_{nl}}{r}$ las funciones radiales reducidas.

   a) Mostrar que u_{10}^2 tiene un máximo en $r = a_0$ (el radio de Bohr).

   b) Calcular la posición para la cual la densidad de probabilidad es máxima, para el estado $n = 2$, $l = 1$.

   c) Calcular el valor medio $\langle r \rangle$ en dicho estado

   d) Si no coinciden, explicar por qué hay diferencias

6. Usando la regla de recursión, demostrar que la solución radial del átomo de hidrógeno cumple con
$$R_{n(n-1)} = N_n r^{n-1} e^{-r/(n a_0)} \tag{2}$$

7. Mostrar que un estado estacionario nl del átomo de hidrógeno cuyo momento angular es máximo

   a) $\langle r \rangle = a_0 n(n + \frac{1}{2})$

   b) $\langle r^2 \rangle = a_0^2 n^2 (n+1)(n + \frac{1}{2})$

   c) Usar los resultados anteriores para mostrar que si n y l son muy grandes el electrón está localizado cerca de la superficie de una esfera de radio $a_0 n^2$ y su energía es igual a la de un electrón clásico

   d) Calcular el valor mas probable del radio para $l = n - 1$

8. La función de onda de un átomo de hidrógeno es:

$$\Psi = \frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}} Z^{3/2}(6 - Zr)Zre^{-\frac{Zr}{3}} \cos\theta$$

   a) Determinar los valores de los números cuánticos n, l y m_l de Ψ por inspección.

   b) Generar otra función con los mismos valores de n y l, pero con $m_l + 1$.

   c) Determinar el valor más probable de r en el estado especificado por Ψ, para $Z = 1$.