

Apuntes de las clases de Física Teórica II.

"Esto no es un libro de texto" (J.G. Roederer)

Juan Pablo Paz¹

¹*Departamento de Física, FCEyN, UBA & IFIBA (UBA, Conicet
Pabellón 1, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires, Argentina)*

(Dated: May 13, 2014)

Contents

	I. El experimento según la mecánica cuántica.	27
	J. Otras desigualdades de Bell: CHSH	28
	K. La violación de las desigualdades de Bell	29
	L. El entrelazamiento como un recurso físico	30
	M. Comentarios y metáforas finales	30
I. Clase 10: Cuantización del campo electromagnético. Fotones.		2
A. Electromagnetismo clásico. Coordenadas generalizadas.		2
B. Campo en una cavidad. Modos discretos.		2
C. Cuantización del campo. Fotones.		3
D. El estado de vacío		3
II. Clases 11 y 12: Interacción fotones y átomos sencillos: Electrodinámica cuántica en cavidades.		5
A. Interacción de un fotón con un átomo de dos niveles		5
B. Átomos de Rydberg		5
C. Átomos de Rydberg en zonas de Ramsey		6
D. Fotones en cavidades		7
E. Estados del campo en la cavidad		7
F. El esquema de un experimento típico		7
G. Interacción entre un átomo y el campo electromagnético		8
H. La aproximación y el modelo de Jaynes Cummings.		8
I. Solución del modelo de Jaynes Cummings		9
J. Interacción resonante entre el átomo y la cavidad		10
K. Interacción no resonante entre el átomo y la cavidad		10
L. El corrimiento de Lamb y el desfase inducido por cada fotón		11
M. Evidencia directa de la cuantización del campo electromagnético		12
N. Cómo entrelazar dos átomos distantes?		13
O. Cómo entrelazar el campo electromagnético entre dos cavidades distantes		13
P. Cómo transferir el estado de un átomo a la cavidad (y viceversa)		14
Q. Cómo detectar un fotón sin absorberlo?		14
III. Clases 13: Teleportación: ciencia ficción o física?		16
A. La evolución temporal representada como un circuito. Operaciones elementales.		16
B. Preparación y medición de estados de Bell		17
C. La teleportación		18
D. Una propuesta concreta: teleportación de un átomo entre dos cavidades		19
IV. Clase 14: Alternativas a la mecánica cuántica. El origen del azar.		21
A. Un poco de historia...		21
B. Einstein contra la mecánica cuántica. EPR		22
C. Teorías realistas locales. Variables ocultas.		23
D. Cómo sabemos si no existen teorías de variables ocultas cuyas predicciones coincidan con las de la mecánica cuántica?		24
E. Desigualdades de Bell: Mecánica cuántica contra teorías realistas-locales		25
F. Descripción de un experimento sencillo realizado en dos laboratorios.		25
G. El experimento según las teorías realistas locales.		26
H. La desigualdad de Bell más sencilla.		26

I. CLASE 10: CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO. FOTONES.

A. Electromagnetismo clásico. Coordenadas generalizadas.

Las ecuaciones de Maxwell describen completamente al electromagnetismo clásico. Estas son:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{J}\end{aligned}$$

donde ρ es la densidad de carga, \vec{J} la densidad de corriente eléctrica y $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$.

Las dos ecuaciones de Maxwell en las que no aparecen las cargas nos brindan mucha información: Teniendo en cuenta que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ entonces el teorema de Stokes implica que siempre existe un campo \vec{A} tal que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Reemplazando esta expresión en la ecuación de Faraday podemos transformarla en la siguiente: $\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t) = 0$. De esta ecuación se deduce que el campo $\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t$ es irrotacional y por lo tanto, existe una función escalar Φ tal que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$. Obviamente el campo \vec{A} está definido siempre a menos de un gradiente. O sea, que las ecuaciones de Maxwell son invariantes frente a la transformación $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$ y $\Phi \rightarrow \Phi - \partial\Lambda/\partial t$, para toda función $\Lambda(\vec{r}, t)$ (invariancia de gauge). Teniendo en cuenta esto, podemos elegir Λ de modo tal que siempre valga la ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (este es el gauge de Coulomb, que usaremos en esta sección).

Todavía no hemos usados las dos ecuaciones de Maxwell en las que aparecen las fuentes. Ellas nos permitirán determinar los campos Φ y \vec{A} . En ausencia de fuentes, la ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ implica que $\nabla^2\Phi = 0$ (usando que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) por lo cual podemos tomar $\Phi = 0$ siempre. Por último, la ley de Ampere implica que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \partial^2\vec{A}/\partial t^2 = 0$. Usando ahora que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$, obtenemos finalmente que el potencial vector satisface $\nabla^2\vec{A} - (1/c^2)\partial^2\vec{A}/\partial t^2 = 0$. Por lo tanto, \vec{A} evoluciona de acuerdo a la ecuación de ondas (en la que $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ es la velocidad de propagación).

Resulta conveniente reescribir las ecuaciones de Maxwell en términos de la transformada de Fourier de \vec{A} . Definiendo

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k}} (e^{-i\vec{k}\vec{r}} \vec{A}(\vec{k}, t) + c.c.)$$

donde $\omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|c$ (la inclusión en esta fórmula del factor $\sqrt{\hbar/2\epsilon_0\omega_k}$ es arbitraria y equivale a definir las unidades de $\vec{A}(\vec{k}, t)$). Para determinar estas unidades puede razonarse de la siguiente manera: Mas abajo veremos que la cantidad $\epsilon_0 V |\vec{E}|^2$ tiene unidades de energía. En consecuencia, debe valer que $\int d^3\vec{k} |\vec{A}(\vec{k}, t)|^2$ sea adimensional, lo que implica que las unidades de $\vec{A}(\vec{k}, t)$ son $L^{3/2}$.

Para identificar los grados de libertad físicos del campo es importante notar que para cada vector de onda \vec{k} , el vector $\vec{A}(\vec{k})$ tiene solamente dos componentes, las cuales son perpendiculares a \vec{k} (ya que, como vimos mas arriba la ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ implica que $\vec{k} \cdot \vec{A}(\vec{k}, t) = 0$). Si tomamos dos vectores cualesquiera $\vec{e}_{\vec{k}, \lambda}$, $\lambda = 1, 2$, en el plano perpendicular a \vec{k} , el vector potencial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ puede escribirse siempre como

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{\epsilon_0\omega_k}} (\vec{e}_{\vec{k}, \lambda} e^{-i\vec{k}\vec{r}} A_{\vec{k}, \lambda}(t) + c.c.).$$

Usando esta expresión podemos demostrar fácilmente para que el campo satisfaga la ecuación de onda se debe cumplir que $\dot{A}_{\vec{k}, \lambda}(t) + i\omega_{\vec{k}} A_{\vec{k}, \lambda}(t) = 0$ (o que $\ddot{A}_{\vec{k}, \lambda}(t) + \omega_{\vec{k}}^2 A_{\vec{k}, \lambda}(t) = 0$).

En conclusión: El campo electromagnético (en ausencia de fuentes) no es mas que un conjunto de infinitos osciladores armónicos. Las coordenadas generalizadas del campo son las amplitudes $A_{\vec{k}, \lambda}$: dos funciones escalares complejas para cada modo. Su rol es totalmente análogo al de las coordenadas complejas $\alpha = (\tilde{q} + i\tilde{p})/\sqrt{2}$ que pueden usarse para describir al oscilador armónico ordinario.

A partir del potencial vector se pueden calcular trivialmente los campos eléctricos y magnéticos que resultan ser:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= i \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0}} (\vec{e}_{\vec{k}, \lambda} e^{-i\vec{k}\vec{r}} A_{\vec{k}, \lambda} - c.c.) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= -i \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k}} \\ &\quad \times \vec{k} \wedge (\vec{e}_{\vec{k}, \lambda} e^{-i\vec{k}\vec{r}} A_{\vec{k}, \lambda} - c.c.).\end{aligned}$$

Por último, es importante notar que en la teoría clásica de Maxwell hay ciertas magnitudes conservadas que, naturalmente, se originan en las simetrías de dichas ecuaciones. En particular, la invariancia ante traslaciones temporales y espaciales implican la conservación de la energía y el momento del campo electromagnético, que resultan ser

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{r} (\vec{E}^2(\vec{r}) + c^2 \vec{B}^2(\vec{r})). \\ \vec{\mathcal{P}} &= \epsilon_0 \int d^3\vec{r} \vec{E}(\vec{r}) \wedge \vec{B}(\vec{r}).\end{aligned}$$

B. Campo en una cavidad. Modos discretos.

Es importante considerar el caso de campos atrapados en una cavidad de volumen $V = L^3$ (por ejemplo, un cubo cuyos lados tienen longitud L). Si imponemos condiciones de contorno periódicas, las componentes del vector de onda serán $k_j = 2\pi n_j/L$. En ese caso todas las integrales se reducen a sumas sobre todas los vectores

\vec{n} cuyas componentes son enteros no negativos. Para obtener las expresiones de los campos en este caso, debemos reemplazar:

$$\int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{V} \sum_{\vec{n}} \quad (1)$$

en las ecuaciones anteriores. Asimismo, la amplitud $A_{\vec{k},\lambda}$ debe ser reemplazada como

$$A_{\vec{k},\lambda} \rightarrow \frac{V^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} a_{\vec{n},\lambda} \quad (2)$$

donde $a_{\vec{n},\lambda}$ es adimensional.

En ese caso, el potencial vector y los campos electricos y magnéticos se escriben simplemente como

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \sum_{\vec{n},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_n V}} (\vec{e}_{\vec{k}_{\vec{n},\lambda}} e^{-i\vec{k}\vec{r}} a_{\vec{k}_{\vec{n},\lambda}}(t) + c.c.), \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= i \sum_{\vec{n},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2\epsilon_0 V}} (\vec{e}_{\vec{k}_{\vec{n},\lambda}} e^{-i\vec{k}\vec{r}} a_{\vec{k}_{\vec{n},\lambda}}(t) - c.c.), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= i \sum_{\vec{n},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_n V}} \vec{k} \wedge (\vec{e}_{\vec{k}_{\vec{n},\lambda}} e^{-i\vec{k}\vec{r}} a_{\vec{k}_{\vec{n},\lambda}}(t) - c.c.), \end{aligned}$$

C. Cuantización del campo. Fotones.

Para cuantizar el campo electromagnético tenemos que proceder tal como lo hacemos en cualquier otro caso. Las coordenadas generalizadas del sistema son operadores en un espacio de Hilbert. Es decir, en el caso continuo (volumen infinito) las amplitudes $A_{\vec{k},\lambda}$ son operadores que deberán satisfacer relaciones de conmutación análogas a las que satisfacen las amplitudes correspondientes de los osciladores armónicos. Es decir:

$$[A_{\vec{k},\lambda}, A_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\lambda,\lambda'}. \quad (3)$$

Tal como ocurre con cualquier sistema cuántico, la evolución temporal puede describirse en la representación de Heisenberg o en la de Schroedinger. La primera, aquella en la que los operadores evolucionan y los estados son invariables, es mas natural en la teoría de campos. En ese caso los operadores $A_{\vec{k},\lambda}$ son funciones del tiempo que cumplen la ecuación de Heisenberg, que es simplemente: $\dot{A}_{\vec{k},\lambda} + i\omega_{\vec{k}} A_{\vec{k},\lambda} = 0$.

En el caso de un campo en una cavidad, los operadores $a_{\vec{n},\lambda}$ deben satisfacer

$$[a_{\vec{n},\lambda}, a_{\vec{n}',\lambda'}^\dagger] = \delta_{\vec{n},\vec{n}'} \delta_{\lambda,\lambda'}. \quad (4)$$

Entonces, los operadores $a_{\vec{n},\lambda}$ y $a_{\vec{n},\lambda}^\dagger$ son operadores de creación y destrucción, tal como los de un oscilador armónico usual. Como tenemos un oscilador para cada modo $\{\vec{n}, \lambda\}$, podemos construir una base completa

del conjunto de estados cuánticos del campo electromagnético usando vectores que sean autoestados de todos los operadores de la forma $N_{\vec{n},\lambda} = a_{\vec{n},\lambda}^\dagger a_{\vec{n},\lambda}$. Estos estados pueden escribirse como $\otimes_{\vec{n},\lambda} |m_{\vec{n},\lambda}\rangle$, para todos los valores de $m_{\vec{n},\lambda} \geq 0$. Diremos que este estado tiene $m_{\vec{n},\lambda}$ fotones en el modo $\{\vec{n}, \lambda\}$ del campo.

Cuales son las propiedades de los fotones? Para entenderlas, podemos escribir la energía y el momento del campo electromagnético en función de los operadores $a_{\vec{n},\lambda}$. Es fácil demostrar que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{\vec{n},\lambda} \hbar\omega_{\vec{n}} (a_{\vec{n},\lambda}^\dagger a_{\vec{n},\lambda} + \frac{1}{2}) \\ \vec{P} &= \sum_{\vec{n},\lambda} \hbar\vec{k}_{\vec{n}} a_{\vec{n},\lambda}^\dagger a_{\vec{n},\lambda} \end{aligned}$$

Las propiedades de los fotones son muy sencillas e interesantes. En efecto, el estado con m fotones en el modo $\{\vec{n}, \lambda\}$ es un autoestado de la energía del campo con autovalor $\hbar\omega_{\vec{n}}(m + 1/2)$ y también es un autoestado del momento con autovalor $m \hbar\vec{k}_{\vec{n}}$. Por ese motivo, podemos decir que los fotones son excitaciones del campo electromagnético que transportan momento lineal y energía. En ese sentido se comportan como partículas (y pueden ser detectados y producidos de a uno por vez). Puede verse también que los fotones transportan momento angular, pero eso no será tratado en este curso.

D. El estado de vacío

El estado de vacío es aquel estado en donde no hay fotones. Todos los osciladores del campo están en su estado fundamental. Ese estado será denotado como $|0\rangle$. Obviamente, el estado de vacío es un autoestado del operador de momento del campo con autovalor nulo. Sin embargo, es un autoestado de la energía del campo con un autovalor infinito! En efecto, es obvio que $\mathcal{H}|0\rangle = \sum_{\vec{n},\lambda} \omega_{\vec{n}}/2 |0\rangle$. En la mayoría de los casos esta energía infinita puede ser dejada de lado ya que es simplemente una constante aditiva (y la energía siempre está definida a menos de una constante). En otras palabras, podemos referir todas las energías a la energía del vacío electromagnético (fijando ahí el cero de las energías). Esto es correcto siempre y cuando está energía sea verdaderamente constante. Y esto no siempre es así. Por ejemplo, en una cavidad la energía del vacío depende de la forma de la cavidad (ya que los vectores de onda \vec{k} están cuantizados y toman valores que son múltiplos enteros de $2\pi/L$). Por eso, tiene sentido físico preguntarse cómo depende la energía del vacío de la forma de la cavidad. Analizando esta dependencia vemos que, por ejemplo, la energía del vacío en una cavidad formada por dos placas paralelas perfectamente conductoras disminuye con la distancia entre placas (para calcular esto es necesario restar dos magnitudes que son ambas infinitas, para lo cual es necesario utilizar algún método de "regularización"). Esto quiere decir que

para las placas es energéticamente favorable acercarse, lo cual implica que sobre ellas aparecerá una fuerza, llamada fuerza de Casimir, cuyo origen está en la estructura no trivial del vacío del campo electromagnético. Mas adelante veremos algunas otras consecuencias no triviales de la interacción entre átomos y el campo electromagnético y mostraremos que la interacción con el campo tiene consecuencias sobre el átomo aún en ausencia de fotones.

E. Fotones en una cavidad con un único modo

Por último, es conveniente analizar el caso del campo electromagnético atrapado en una cavidad que puede almacenar un único modo. Supondremos que el vector de onda \vec{k} apunta en la dirección del eje e_z . Asimismo, supondremos que hay un único modo relevante, que es el de longitud de onda mas larga $|\vec{k}| = 2\pi/L$ y que la polarización del campo es lineal. En ese caso, los campos son (en la representación de Heisenberg):

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{E_0}{\omega} e_x (e^{-i2\pi z/L} a(t) - e^{i2\pi z/L} a^\dagger(t)), \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= -iE_0 e_x (e^{-i2\pi z/L} a(t) - e^{i2\pi z/L} a^\dagger(t)), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= -i\frac{E_0}{c} e_y (e^{-i2\pi z/L} a(t) - e^{i2\pi z/L} a^\dagger(t)), \\ E_0 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}\end{aligned}$$

donde $a^\dagger(t) = a^\dagger \exp(i\omega t)$ es el operador de creación de fotones. Si queremos trabajar en la representación de Schroedinger debemos dejar de lado la dependencia temporal de estos operadores.

En el estado de vacío (que es tal que $a|0\rangle = 0$) los valores medios de todos los campos son $\langle 0|\vec{E}|0\rangle = \langle 0|\vec{B}|0\rangle = 0$. En cambio, las dispersiones no nula ya que

$$\langle 0|\vec{E}^2(z, t)|0\rangle = E_0^2 = c^2 \langle 0|\vec{B}^2(z, t)|0\rangle.$$

En analogía total con lo que hicimos para los osciladores armónicos, podemos definir estados coherentes del campo electromagnético como aquellos que son autovectores de los operadores de destrucción. En esos estados, los valores medios de los operadores de campo son no nulos y evolucionan en el tiempo tal como lo predicen las ecuaciones de Maxwell.

II. CLASES 11 Y 12: INTERACCIÓN FOTONES Y ÁTOMOS SENCILLOS: ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA EN CAVIDADES.

A. Interacción de un fotón con un átomo de dos niveles

En este capítulo estudiaremos la interacción entre átomos simples y fotones atrapados en una cavidad. Será necesario tratar a ambos sistemas, los átomos y los fotones, como sistemas cuánticos en interacción. Cabe destacar que hasta ahora vimos situaciones en las que tratamos cuánticamente átomos simples (sistemas de dos niveles, por ejemplo) en interacción con campos externos que fueron tratados clásicamente. Hicimos esto, por ejemplo, cuando analizamos las oscilaciones de Rabi inducidas sobre un sistema de dos niveles por su interacción con un campo externo oscilante. Asimismo, hicimos un tratamiento cuántico para el campo electromagnético y naturalmente podemos concebir la interacción de dicho campo con materia clásica. Por ejemplo, esto sucede cuando modelamos la interacción entre el campo cuántico y espejos o cavidades en los que los efectos cuánticos asociados a los átomos que componen estos objetos son despreciables. A lo largo de este capítulo utilizaremos como herramientas estos sistemas (átomos cuánticos en interacción con campos clásicos y campos cuánticos en interacción con materia clásica). La novedad del capítulo será la descripción de la interacción entre átomos y campos en el régimen en el que los efectos cuánticos en ambos sistemas son importantes.

Este capítulo pretende ser una síntesis de los que vimos hasta ahora en la materia. Para comprenderlo, es necesario utilizar todas las herramientas que introdujimos hasta ahora. En efecto, será necesario combinar los conocimientos que adquirimos sobre la mecánica cuántica de sistemas de dos niveles, la de los sistemas compuestos (ya que trataremos, precisamente, un sistema compuesto por dos partes esenciales: el átomo y el campo), será importante utilizar todo lo aprendido sobre la evolución temporal de sistemas cuánticos así como también la física del oscilador armónico y del campo electromagnético.

Otro de los objetivos de este capítulo es mostrar como en algunos casos es posible imponer a un sistema un determinado tipo de evolución (o, en algún sentido, diseñar el operador de evolución temporal). Veremos como, de este modo, podemos producir y controlar el entrelazamiento entre sistemas distantes (entre átomos y fotones, entre átomos distantes o entre fotones almacenados en cavidades distantes). Veremos como son, en definitiva, los experimentos que han permitido, manipulando sistemas cuánticos individuales, ponen de manifiesto las propiedades más extrañas de la mecánica cuántica.

Para comenzar describiremos por separado los personajes protagónicos de nuestro estudio: átomos de Rydberg y fotones atrapados en cavidades.

B. Átomos de Rydberg

Vamos a considerar átomos preparados en estados muy especiales. Son los llamados átomos de Rydberg. Para describirlos, utilizaremos los modelos que han visto hasta aquí (en Física IV, por ejemplo). Prepararemos átomos alcalinos (Rb, rubidio, por ejemplo) en estados altamente excitados. En estos estados el número cuántico principal es cercano a $n = 50$ y por lo tanto están muy cerca del umbral de ionización (recordemos que la energía del nivel n es $E_n = -E_0/n^2$, donde $E_0 = me^4/2\hbar^2$, que toma un valor de $13.6eV$ para el átomo de Hidrógeno)). Nos restringiremos a considerar situaciones experimentales en los que hay un número muy pequeño de niveles que son accesibles al átomo. En realidad, trataremos solamente la situación más simple de todas: nuestro átomo tendrá solamente dos niveles relevantes (ver más abajo). Esos niveles serán denotados simplemente como $|g\rangle$ y $|e\rangle$.

Como mencionamos, los átomos de Rydberg no solamente tienen un alto número cuántico principal (que será $n = 49$ para $|g\rangle$ y $n = 50$ para $|e\rangle$). Además, estos estados son tales que los valores de los números cuánticos asociados al momento angular son los máximos compatibles con el valor de n . En efecto, en todos los casos tendremos $l = n - 1$ y $m = l$. Varios grupos en el mundo dominan hoy la técnica de preparación de este tipo de estados. El grupo dirigido por Serge Haroche, por ejemplo, los prepara a partir de un haz obtenido de un horno en el que se inyecta un vapor de Rb. Los átomos al salir del horno pasan por varios láseres que los excitan en una escalera ascendente (los átomos tienen que absorber alrededor de $n = 45$ fotones para pasar de su estado fundamental, que es el estado $4d$, con $n = 4$ y $l = 2$, a los estados con $n = 49$ o 50). Asimismo, se utilizan campos magnéticos lentamente variables para crear (en forma adiabática) los estados de alto momento angular. Una vez obtenidos, los átomos forman un haz que es colimado y filtrado con un selector de velocidades. Las velocidades típicas de los átomos en el haz son de algunas centenas de m/seg y el flujo de átomos es suficientemente bajo como para poder asegurar que en cada instante tendremos un único átomo en el dispositivo experimental (que describimos más abajo).

Los estados de alto momento angular describen orbitales "planos" en los que la función de onda del electrón está concentrada en una circunferencia de radio $r = R_B n^2$, donde $R_B = \hbar^2/me^2$ es el radio de Bohr, cuyo valor es $0.5A$. Esto puede verse recordando que las funciones de onda de los autoestados comunes de H , \vec{L}^2 y L_z , a menos de una constante de normalización (C_n) son;

$$\Psi_{n,n-1,m} = C_n \left(\frac{r}{2R_B}\right)^{n-1} e^{-\frac{r}{nR_B}} (\sin\theta)^l e^{im\phi}$$

El carácter plano de estos orbitales surge de la dependencia con el ángulo θ , ya que para altos valores de n , la función $\sin^n\theta$ toma valores muy pequeños salvo para ángulos cercanos a $\theta = \pi/2$, que define el plano de la órbita. Asimismo, es fácil ver que la función de onda está

localizada para valores de la distancia r que son tales que el valor medio de dicha distancia es $\langle r \rangle = n^2 R_B$. Esto puede verse calculando explícitamente este valor medio pero también apelando a argumentos más intuitivos basados en las reglas de cuantización de Bohr Sommerfeld. En efecto, para estos estados podemos pensar que el electrón en el átomo está descrito por una onda estacionaria de longitud de onda de de Broglie ($\lambda_{dB} = \hbar/p$) que es tal que se cumple la condición de cuantización que impone que en una órbita cerrada entre un número enteros de longitudes de onda. Es decir, debe cumplirse que $2\pi r = n\lambda_{dB}$). La dependencia del radio de la órbita con el número cuántico principal, n , surge de notar que el momento p es tal que $p^2/2m \approx E_0/n^2$ y de reemplazar en la expresión que nos dice que $r = n\hbar/2\pi p$. En consecuencia, se obtiene que $r = n^2\hbar/2\pi(E_0/2m)^{1/2} = n^2 r_B$.

En los experimentos que analizaremos se preparan estados que son combinaciones lineales de estados de Rydberg con valores de $n = 49$ y $n = 50$. La función de onda de un estado de este tipo, $|\phi\rangle = (|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$, es tal que (a menos de una constante de normalización)

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, \phi, t) = & \sin^{49} e^{i49\phi} \left(\frac{r}{49r_B}\right)^{49} e^{-\frac{r}{49r_B}} e^{-iE_g t/\hbar} \\ & + \sin^{50} e^{i50\phi} \left(\frac{r}{50r_B}\right)^{50} e^{-\frac{r}{50r_B}} e^{-iE_e t/\hbar} \end{aligned}$$

Esta expresión puede simplificarse evaluando la función de onda en el plano $\theta = \pi/2$ y para valores de r en los cuales los dos términos de la ecuación son iguales (que son del orden de $n^2 r_B$). En ese caso, es simple analizar la dependencia de la $\phi(r, \theta, \phi, t)$ como función de ϕ y del tiempo. En efecto, definiendo la frecuencia de Bohr $\omega_A = (E_e - E_g)/\hbar \approx E_0/n^3$, resulta que

$$\phi\left(r, \frac{\pi}{2}, \phi, t\right) \propto \cos\left(\frac{\phi - \omega_A t}{2}\right)$$

Esto tiene una interpretación simple: el estado ϕ , superposición de $|g\rangle$ y $|e\rangle$ describe a un átomo planetario en el que el electrón está localizado en su órbita y que gira alrededor del núcleo con una frecuencia ω_A . Es evidente que en este estado el valor medio del momento dipolar eléctrico es no nulo y con un valor cercano a $d_0 = er_B n^2$. El valor medio del momento dipolar es nulo en los estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$ pero este operador tiene elementos de matriz no nulos entre los estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$, tal como describimos mas abajo.

Pero antes, conviene notar que los estados de Rydberg (y sus superposiciones) son muy estables, lo que también puede entenderse cualitativamente apelando a argumentos semiclásicos basados en la cuantización alla Bohr Sommerfeld: Al decaer del nivel n al $n-1$ el átomo emite una energía $\hbar\omega_A = (E_n - E_{n-1})/\hbar$. Para n grande ambos estados están cerca del nivel de ionización y entonces la diferencia de energías es muy pequeña: como $E_n = -E_0/n^2$ entonces $\omega_{n,n-1} \propto 1/n^3$. El tiempo de decaimiento τ_n del nivel n al $n-1$ puede estimarse calculando la potencia disipada en esta transición. Esta

potencia pot_n es aproximadamente igual a la diferencia de energías dividido el tiempo de vida medio, es decir: $pot_n = \hbar\omega_{n,n-1}/\tau_n$. Asimismo, para una carga en movimiento circular la potencia emitida es proporcional a la aceleración al cuadrado. Entonces tenemos $pot_n \approx \hbar\omega_{n,n-1}/\tau_n \propto (\omega_{n,n-1}^2 r_n)^2$ en consecuencia, la dependencia de τ_n con el número cuántico principal surge de la expresión

$$\tau_n \propto \frac{\hbar\omega_{n,n-1}}{(\omega_{n,n-1}^2 r_n)^2} \propto \frac{n^{-3}}{n^{-12} n^4} \propto n^5.$$

C. Átomos de Rydberg en zonas de Ramsey

La diferencia de energía entre los estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$ es tal que la frecuencia de Bohr asociada está en el rango de las micro-ondas (típicamente, para el Rb, es $\omega_A = 51GHz$). Una vez preparados los átomos en el estado $|g\rangle$ podremos preparar superposiciones arbitrarias de este estado y el estado $|e\rangle$. Para ello apelaremos a un recurso que ya hemos visto: Irradiaremos el átomo con un campo de radio frecuencias que resuene con la transición entre $|g\rangle$ y $|e\rangle$. Esta interacción tiene lugar cuando el átomo pasa entre dos placas que están conectadas a un generador de RF apropiadamente elegido. Controlando el tiempo de interacción y la intensidad del campo podemos lograr preparar estados arbitrarios. Conviene repasar este fenómeno y generalizar ligeramente el tratamiento que realizamos anteriormente para estudiar las oscilaciones de Rabi.

En la zona de Ramsey el átomo interactúa con un campo clásico. La interacción está descrita por el siguiente Hamiltoniano:

$$H_T = \frac{\hbar\omega_A}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) + \hbar\tilde{\Omega} (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \cos(\omega_r t + \phi).$$

donde ϕ es una fase arbitraria. Pasando a la representación de interacción (con $H_0 = \hbar\omega_A (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)/2$) se obtiene que

$$\tilde{H}_I = \hbar\frac{\tilde{\Omega}}{2} \cos(\omega_r t + \phi) (|e\rangle\langle g| e^{i\omega_A t} + |g\rangle\langle e| e^{-i\omega_A t})$$

Si hacemos la "aproximación de onda rotante" reteniendo los términos que dependen mas lentamente del tiempo obtenemos

$$\tilde{H}_I = \hbar\tilde{\Omega} (|e\rangle\langle g| e^{i(\omega_A - \omega_r)t - i\phi} + |g\rangle\langle e| e^{-i(\omega_A - \omega_r)t + i\phi}).$$

Para el caso resonante tenemos

$$\tilde{H}_I = \hbar\frac{\tilde{\Omega}}{2} (|e\rangle\langle g| e^{-i\phi} + |g\rangle\langle e| e^{i\phi}).$$

Este Hamiltoniano puede escribirse en términos de las matrices de Pauli $\sigma_x = |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|$ y $\sigma_y = -i|e\rangle\langle g| + i|g\rangle\langle e|$. En efecto, obtenemos que

$$\tilde{H}_I = \hbar\frac{\tilde{\Omega}}{2} (\cos\phi \sigma_x + \sin\phi \sigma_y).$$

Como vemos, el Hamiltoniano en la representación de interacción es una combinación lineal de operadores de Pauli. Por lo tanto, la evolución temporal es una rotación y el operador de evolución temporal es:

$$U(t) = \cos(\tilde{\Omega}t/2) \mathbb{1} - i \sin(\tilde{\Omega}t/2) \vec{n} \cdot \vec{\sigma}.$$

Donde $\vec{n} = \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y$ define la dirección del eje de rotación.

En definitiva, lo importante es recordar que en las zonas de Ramsey el estado del átomo cambia tal como lo hace un spin en un campo magnético. O sea, se inducen oscilaciones coherentes entre $|e\rangle$ y $|g\rangle$. De este modo, preparando el estado inicial $|g\rangle$ podemos obtener, luego de un tiempo apropiadamente elegido, una combinación lineal arbitraria entre este estado y el estado $|e\rangle$.

Para los átomos de Rydberg, los estados superposición obtenidos por esta vía tienen propiedades muy especiales. Obviamente, no son estados estacionarios y por consiguiente su función de onda cambia con el tiempo. En efecto, en un dado instante, las funciones de onda de estos estados están concentradas en circunferencias que tienen aproximadamente el mismo radio pero no tienen igual número de nodos (ya que para un estado hay 49 nodos y para el otro hay 50). En consecuencia, el estado que es superposición de $|g\rangle$ y $|e\rangle$ tiene una función de onda que está concentrada en una de las regiones de la órbita y que al evolucionar rota alrededor de dicha circunferencia. En definitiva, estos estados son estados planetarios: el electrón se mueve en una órbita tal como lo hace un planeta alrededor del sol. Por lo tanto, estos átomos tienen un momento dipolar enorme, que rota con la frecuencia de Bohr (que, como dijimos está en el rango de las radiofrecuencias). Debido al enorme momento dipolar, cuando estos átomos ingresan a la cavidad descrita mas abajo interactúan muy fuertemente con el campo cuántico almacenada en ella.

Por lo tanto si preparamos un estado que es superposición de $|e\rangle$ y $|g\rangle$ tendremos interferencia constructiva en una región de la circunferencia e interferencia destructiva en la opuesta. Un estado de este tipo se acopla muy fuertemente al campo eléctrico ya que tiene un momento dipolar enorme: El electrón está localizado en una región de la órbita circular y gira con una velocidad angular (que tiene que ver con la diferencia de energía entre los estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$ que, como dijimos, está en el rango de las micro ondas). En efecto, la componente relevante del operador momento dipolar eléctrico puede aproximarse como

$$\vec{d} = d_0 e_x (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)$$

donde $d_0 \propto e R_B n^2$ siendo R_B el radio de Bohr y n el número cuántico principal que, como dijimos, es cercano a $n \approx 50$. Denotaremos como ω_A a la frecuencia de Bohr entre los niveles del átomo: $E_e - E_g = \hbar \omega_A$. Asimismo, usaremos la notación $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ y $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$.

D. Fotones en cavidades

) Consideraremos fotones atrapados en una cavidad que resuena en el rango de las microondas (y que, por lo tanto, puede ponerse en resonancia con la transición del átomo). La frecuencia de resonancia de la cavidad puede modificarse ligeramente modificando su tamaño (son cavidades de alrededor de algunos centímetros de diámetro). La relación entre la frecuencia del átomo y la de la cavidad también puede modificarse aplicando campos eléctricos estáticos que producen leves corrimientos en los niveles del átomo debido al efecto Stark. Además de estas cavidades "grandes" (que son fabricadas con espejos superconductores) existen cavidades que resuenan en el rango óptico. Estas cavidades son mucho mas pequeñas y el tiempo de vida medio del fotón en ellas es mucho mas corto que en el caso de las microondas. La ventaja que tienen frente a las cavidades de Haroche es que, como el volumen de interacción es mucho menor, se pueden alcanzar regímenes de muy alto acoplamiento. En este capítulo nos limitaremos a analizar experimentos con cavidades superconductoras. El tiempo de vida medio de las excitaciones del campo puede ser muy largo. En los experimentos de Haroche el factor de calidad de la cavidad es $Q \geq 10^{12}$ por lo cual un fotón puede vivir en la cavidad sin ser absorbido por algunas décimas de segundo (tiempo suficiente para que la luz recorra una distancia igual a la circunferencia completa de la tierra).

E. Estados del campo en la cavidad

El campo electromagnético en la cavidad está descrito por un estado cuántico. A tiempos muy largos la cavidad pierde toda su energía y el estado asintótico es el vacío (ya que las paredes de la cavidad están a temperaturas muy bajas, mucho menores que la energía de un fotón). A partir de este estado resulta sencillo preparar un estado coherente del campo en la cavidad. En efecto, la cavidad es capaz de almacenar un único modo del campo electromagnético. Si conectamos la cavidad a una fuente de radiofrecuencias entonces a partir del estado $|0\rangle$ se puede preparar un estado coherente $|\alpha(t)\rangle$, donde $\alpha(t)$ depende del tiempo de interacción, de la frecuencia de la cavidad y las radiofrecuencias inyectadas y de la intensidad de dicho campo. El mecanismo por el cual esto sucede fue analizado en el capítulo referido al oscilador armónico (Cómo preparar un estado coherente?).

F. El esquema de un experimento típico

Un experimento típico combina todos los ingredientes que vimos hasta ahora: El átomo es preparado en el estado $|g\rangle$ ($n = 49$, $l = m = 49$) y luego es filtrado en velocidades. El haz de átomos incide en la cavidad resonante pero antes pasa por una zona de Ramsey en la cual puede prepararse el átomo en un estado arbitrario

(que es superposición de $|g\rangle$ y $|e\rangle$). En la cavidad interactúa con el campo de una manera que describiremos mas abajo. A la salida de la cavidad pasa por otra zona de Ramsey en la cual puede ejecutarse una rotación arbitraria del estado interno. Finalmente el detector registra si el estado del átomo es $|e\rangle$. Teniendo en cuenta que el detector está precedido por una zona de Ramsey, el efecto combinado de estos dos dispositivos es equivalente a un detector que registre si el estado del átomo es algún estado que podemos elegir arbitrariamente.

El diagrama experimental se describe esquemáticamente en la figura. Podemos imaginar dispositivos mas complejos, con varios haces de átomos y varias cavidades. Es posible imaginar experimentos de este tipo. La gran diferencia entre estos experimentos imaginarios y los descritos en esta sección es que estos últimos no son imaginarios sino reales. Todos los experimentos reales han sido realizados, hasta el momento, con dispositivos como el de la figura (pero dispositivos mas complejos, con dos cavidades y varios haces de átomos, están siendo preparados en la actualidad).

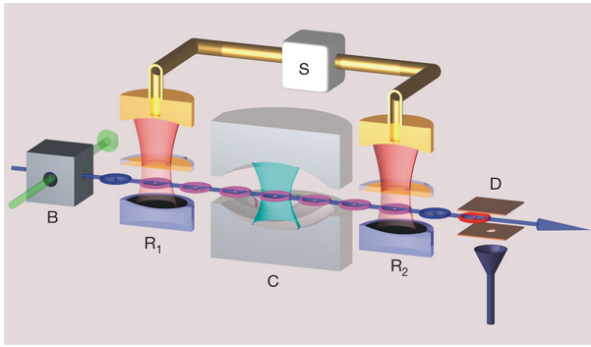


FIG. 1 El dispositivo típico en un experimento en CQED. Los átomos son preparados en estados de Rydberg. Luego atraviesan una region $R1$ (primera zona de Ramsey), luego atraviesan la cavidad en la que interactúan con el campo, finalmente ingresan en una nueva zona de Ramsey $R2$ y son detectados en dispositivos que inducen una ionización selectiva (o sea, detectan si el átomo está en el estado $|e\rangle$ o en $|g\rangle$).

G. Interacción entre un átomo y el campo electromagnético

Teniendo en cuenta que los átomos de Rydberg planetarios tienen un momento dipolar muy grande, la principal fuente de interacción entre el átomo y el campo es de tipo dipolar eléctrica. En efecto, la interacción dipolar entre el átomo y el campo eléctrico se describe con el Hamiltoniano $H_{int} = -\vec{p} \cdot \vec{E}(0)$ (donde suponemos que el átomo y el campo interactúan muy cerca de la región vecina a $\vec{r} = 0$). Tal como lo vimos anteriormente, el campo eléctrico es $\vec{E}(0) = -i\vec{e}_x E_0(a - a^\dagger)$, donde a^\dagger y a son operadores de creación y destrucción de fotones (aquí suponemos que la cavidad está orientada a lo largo

del eje z , con paredes en $z = 0$ y $z = L$). La amplitud del campo eléctrico en el vacío es $E_0 = \sqrt{\hbar\omega/2\epsilon_0 V}$. Como dijimos mas arriba, el operador momento dipolar eléctrico del átomo tiene elementos de matriz no nulos entre los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$, es decir,

$$d_x = d_0(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|).$$

Entonces el hamiltoniano de interacción puede escribirse como

$$H_{int} = -i\hbar\gamma(\sigma_- + \sigma_+)(a - a^\dagger),$$

donde $\hbar\gamma = d_0 E_0$. En otras palabras, γ es una frecuencia característica que aparece en el problema y que está definida como $\gamma = d_0 \sqrt{\omega/\hbar\epsilon_0 V}$ (recordemos que $d_0 = eR_B n^2$).

En conclusión, el modelo simplificado de un átomo de dos niveles en interacción con un modo del campo electromagnético atrapado en una cavidad se describe mediante el siguiente Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H_T &= H_A + H_C + H_{int} \\ H_A + H_C &= \hbar\omega_A \sigma_z + \hbar\omega_C (a^\dagger a + 1/2) \\ H_{int} &= -i\hbar\gamma(\sigma_- + \sigma_+)(a - a^\dagger). \end{aligned}$$

H. La aproximación y el modelo de Jaynes Cummings.

Para resolver este problema es conveniente realizar una aproximación cuya naturaleza se comprende si trabajar en la representación de interacción tomando $H_0 = H_A + H_C$ (luego volveremos a la representación de Schroedinger). Haciendo esto (y denotando $\tilde{H}_{int} = U_0^\dagger H_{int} U_0$) obtenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{int} &= -i\hbar\gamma(\sigma_- e^{-i\omega_A t} + \sigma_+ e^{+i\omega_A t}) \\ &\times (a e^{-i\omega_C t} - a^\dagger e^{i\omega_C t}) \end{aligned}$$

Como vemos, en este Hamiltoniano aparecen términos que oscilan con frecuencias $(\omega_C \pm \omega_A)$. Los términos que dominan la evolución del sistema son siempre aquellos que varíen mas lentamente en el tiempo (en efecto, estos términos son los únicos que aparecen si calculamos un Hamiltoniano promediado en el tiempo durante una escala que es larga para los tiempos rápidamente oscilantes pero corta para los que oscilan lentamente). Estos términos son aquellos en los que aparece la diferencia entre ambas frecuencias. Definiremos la desintonía entre el átomo y la cavidad como

$$\Delta = \omega_A - \omega_C.$$

Despreciaremos la contribución de los términos que oscilan rápidamente (esta se conoce como la "aproximación de la onda rotante", RWA). En ese caso el Hamiltoniano en la representación de interacción (en la representación de interacción) resulta ser

$$\tilde{H}_{int} = -i\hbar\gamma(\sigma_+ a e^{i\Delta t} - \sigma_- a^\dagger e^{-i\Delta t}).$$

Si volvemos a la representación de Schroedinger vemos que este Hamiltoniano se origina en el siguiente Hamiltoniano de interacción

$$H_{int} \approx H_{JC} = -i\hbar\gamma(a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-).$$

Este Hamiltoniano define el modelo que usaremos en este capítulo para describir la interacción entre el átomo de dos niveles y los fotones de la cavidad. Su interpretación es sencilla: contiene un término que induce la destrucción de un fotón y la excitación del átomo (el término que contiene el producto $a \otimes \sigma_+$) y otro término que induce la creación de un fotón a expensas de la energía del átomo (el término proporcional a $a^\dagger \otimes \sigma_-$). Es decir, el Hamiltoniano a resolver es

$$\begin{aligned} H_T &= H_A + H_C + H_{JC} \\ H_A + H_C &= \hbar\omega_A\sigma_z + \hbar\omega_C(a^\dagger a + 1/2) \\ H_{JC} &= -i\hbar\gamma(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger) \end{aligned}$$

El modelo de Jaynes Cummings es suficientemente sencillo como para admitir una solución exacta pero describe un física muy rica y es aplicable a situaciones realistas de interés experimental.

I. Solución del modelo de Jaynes Cummings

La solución de este modelo es sencilla y puede hacerse en forma exacta. Para eso conviene escribir el Hamiltoniano H_T en la base del autoestados de $H_0 = H_A + H_C$. Esta base es

$$\mathcal{B} = \{|g\rangle \otimes |n\rangle, |e\rangle \otimes |n\rangle, n \geq 0\},$$

(los estados $|n\rangle$ son estados con n fotones, o sea, cumplen que $\hat{N}|n\rangle = a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$). Por simplicidad omitiremos el símbolo del producto tensorial \otimes : y denotaremos a esta base como $\mathcal{B} = \{|g, n\rangle, |e, n\rangle, n \geq 0\}$.

La solución puede hacerse siguiendo los siguientes pasos:

1. Estado fundamental: En primer lugar, es fácil identificar cual es el estado fundamental de H_T . En efecto, H_{JC} es tal que

$$H_{JC}|g, 0\rangle = 0,$$

(lo cual se deduce usando que $a|0\rangle = 0$ y $\sigma_-|g\rangle = 0$). En consecuencia, $|g, 0\rangle$ es el estado fundamental de H_T ya que es autoestado de H_0 y también de H_{JC} . El autovalor asociado a $|g, 0\rangle$ es obviamente el mismo que el autovalor para H_0 , es decir: $H_T|g, 0\rangle = E^{(0)}|g, 0\rangle$ con

$$E_{g,0}^{(0)} = -\frac{\hbar\Delta}{2}.$$

(recordemos que Δ es la desintonía : $\Delta = \omega_A - \omega_C$.

2. Subespacios invariantes. El resto de los vectores de la base \mathcal{B} son autoestados de H_0 pero no son autoestados de H_{JC} . Sin embargo, es fácil ver que H_{JC} es diagonal por bloques de 2×2 en la base \mathcal{B} . Para ver esto, podemos considerar los subconjuntos de \mathcal{B} formados por los vectores

$$\mathcal{B}_n = \{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\},$$

para cada $n \geq 0$.

Evidentemente la base \mathcal{B} es la unión del estado fundamental $|g, 0\rangle$ y de todos los conjuntos \mathcal{B}_n . Es fácil ver que H_{JC} no mezcla los subespacios generados por cada uno de los conjuntos \mathcal{B}_n . Es decir, estos subespacios son subespacios invariantes frente a la dinámica del sistema: un estado que sea combinación lineal de los vectores de la base \mathcal{B}_n evolucionará en otro que también sea combinación lineal de esos vectores.

Para ver que los subespacios generados por los vectores de \mathcal{B}_n son invariantes basta con notar que al aplicar el Hamiltoniano H_{JC} al vector $|e, n\rangle$ obtenemos un vector proporcional a $|g, n+1\rangle$ (y viceversa). De esto surge que los espacios generados por \mathcal{B}_n no están conectados entre si. Los elementos de la matriz de H_{JC} en cada uno de esos subespacios son:

$$H_n = \hbar \begin{pmatrix} (n+1)\omega_C + \Delta/2 & -i\gamma\sqrt{n+1} \\ i\gamma\sqrt{n+1} & (n+1)\omega_C - \Delta/2 \end{pmatrix}.$$

Para demostrar esta última identidad hay que usar que los operadores de creación y destrucción satisfacen $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ y $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

3. Los estados excitados. La diagonalización de las matrices de H_T restringida al subespacio \mathcal{B}_n es muy sencilla. Para hacerlo no es necesario hacer ninguna cuenta sino utilizar los conocimientos que adquirimos hasta ahora: H_n es una matriz de 2×2 que se puede escribir como combinación lineal de la identidad $\mathbb{1}$ y de las matrices de Pauli. En efecto:

$$\begin{aligned} H_n &= (n+1)\hbar\omega_C\mathbb{1} + \frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z + \gamma\sqrt{n+1}\sigma_y \\ &= a_n\mathbb{1} + \vec{b}_n \cdot \vec{\sigma}, \end{aligned}$$

donde definimos la constante a_n , y el vector \vec{b}_n como

$$\begin{aligned} \vec{b}_n &= \frac{\Delta}{2}\vec{e}_z + \gamma\sqrt{n+1}\vec{e}_y \\ a_n &= (n+1)\omega_C \end{aligned}$$

Es inmediato probar que los autovalores del operador H_n , y los proyectores asociados a dichos autovalores son

$$\begin{aligned} E_{n,\pm} &= a_n \pm |\vec{b}_n| \\ \mathcal{P}_{n,\pm} &= \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \sigma). \end{aligned}$$

Esto surge de lo visto sobre autovalores y autovectores de operadores que se escriben como combinación lineal de matrices de Pauli y surge del hecho de que $(\vec{b} \cdot \vec{\sigma})^2 = |\vec{b}|^2$. De manera más explícita, podemos escribir

$$E_{n\pm} = \hbar(n+1)\omega_C \pm \hbar\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \gamma^2(n+1)},$$

$$\mathcal{P}_{n,\pm} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \gamma^2(n+1)}}(\frac{\Delta}{2}\sigma_z + \gamma\sqrt{(n+1)}\sigma_y))$$

Analizaremos en lo que sigue dos casos límites relevantes: a) el caso resonante $\Delta = 0$ y b) el caso muy fuera de la resonancia $\Delta \gg g$.

J. Interacción resonante entre el átomo y la cavidad

En el caso resonante el átomo y la cavidad tienen la misma frecuencia (o sea $\Delta = 0$). En ese caso los autovalores y autovectores son

$$E_{n\pm} = \hbar(n+1)\omega_C \pm \gamma\sqrt{n+1},$$

$$\mathcal{P}_{n,\pm} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \sigma_y)$$

En consecuencia, los autoestados del H_n son autoestados de σ_y , que pueden escribirse como:

$$|\phi_{n\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, n\rangle \pm i|g, n+1\rangle).$$

De lo que acabamos de hacer surge, de manera trivial, un resultado notable: Si el sistema es preparado inicialmente en alguno de los dos vectores de \mathcal{B}_n la evolución temporal es tal que a tiempos posteriores el estado es una superposición coherente del siguiente tipo:

$$\begin{aligned} |e, n\rangle &\rightarrow e^{-i(n+1)\omega_C t} (\cos \Omega_n t |e, n\rangle + \sin \Omega_n t |g, n+1\rangle) \\ |g, n+1\rangle &\rightarrow e^{-i(n+1)\omega_C t} (-\sin \Omega_n t |e, n\rangle + \cos \Omega_n t |g, n+1\rangle). \end{aligned}$$

La frecuencia de la oscilación coherente es $\Omega_n = \gamma\sqrt{n+1}$ (notar que esta frecuencia depende del número de fotones por vía del factor $\sqrt{n+1}$ (en las dos expresiones anteriores omitimos una fase global). Conviene escribir, a partir de las ecuaciones anteriores, la forma general del operador de evolución temporal. Dado que el Hamiltoniano H_n genera una rotación alrededor del eje \vec{e}_y , entonces el operador de evolución restringido al subespacio generado por la base \mathcal{B}_n es

$$U_n(\Omega_n t) = e^{-i(n+1)\omega_C t} (\cos \Omega_n t \mathbb{1} - i\sigma_y \sin \Omega_n t)$$

$$U_n(\Omega_n t) = e^{-i(n+1)\omega_C t} \begin{pmatrix} \cos \Omega_n t & -\sin \Omega_n t \\ \sin \Omega_n t & \cos \Omega_n t \end{pmatrix}.$$

Este operador depende del producto $\Omega_n t$. Para distintos valores de este producto, el efecto de la interacción es drásticamente distinto. Es por eso que controlando

el tiempo de interacción podemos lograr que el sistema evolucione de manera muy diferente. Algunos ejemplos particularmente relevantes son los denominados "pulsos- $\frac{\pi}{2}$ " (que corresponde al caso en el que $\Omega_n t = \pi/4$) y el "pulso- π " (que se obtiene para $\Omega_n t = \pi/2$). Podemos definir el "pulso- 2π " (obtenido cuando $\Omega_n t = \pi$, pero este resulta trivial, como vemos más abajo). Los operadores de evolución para cada uno de estos "pulsos" (que no son otra cosa que acciones físicas que ejecutamos sobre el sistema, y que implementamos controlando el tiempo de interacción que se modifica cambiando la velocidad de los átomos) son está definido por el siguiente operador de evolución temporal:

$$U_n(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi\frac{(n+1)\omega_C}{\Omega_n}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_n(\pi) = e^{-i2\pi\frac{(n+1)\omega_C}{\Omega_n}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_n(2\pi) = e^{-i4\pi\frac{(n+1)\omega_C}{\Omega_n}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Caba acotar que la notación está inspirada en el hecho de que el operador $U_n(\phi)$ rota el vector que representa al estado en la esfera de Bloch en un ángulo ϕ . En lo que sigue, omitiremos la fase que aparece frente a los operadores que definen a estos tres pulsos y nos referiremos a ellos como "pulso- $\frac{\pi}{2}$ ", "pulso- π ", etc.

Es interesante notar que si preparamos el estado $|e, n\rangle$ luego de un cierto tiempo obtendremos el estado $|g, n+1\rangle$ en el cual el átomo a "decaído" al nivel fundamental emitiendo un fotón. Sin embargo, este decaimiento es totalmente reversible. En efecto, la presencia de la cavidad hace que este fotón no pueda escapar e interactúe nuevamente con el átomo. En este proceso, la evolución se revierte y la energía es reabsorbida por el átomo: después de un cierto tiempo, el estado del conjunto volverá a ser $|e, n\rangle$. Las oscilaciones son análogas a las oscilaciones de Rabi y tienen importantes implicancias físicas que serán estudiadas en ejercicios posteriores.

K. Interacción no resonante entre el átomo y la cavidad

Cuando la desintonía entre el átomo y la cavidad es grande, o sea cuando $|\Delta| \gg g$. En este caso, usar la expresión anterior para la energía reemplazando $\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \gamma^2(n+1)} \approx \frac{\Delta}{2}(1 + 2(n+1)\frac{\gamma^2}{\Delta^2})$. Entonces, los autovalores de H_n son

$$E_{n\pm} = (n+1)\hbar\omega_C \pm \hbar\frac{\Delta}{2} \pm (n+1)\hbar\frac{\gamma^2}{\Delta}.$$

Si la desintonía es positiva ($\Delta = \omega_A - \omega_C \geq 0$) entonces $E_{n,+} \geq E_{n,-}$ y los estados $|n, \pm\rangle$ coinciden respectivamente con los autoestados de H_0 : $|n, +\rangle = |e, n\rangle$ y $|n, -\rangle = |g, n+1\rangle$. En ese caso, las energías de estos

estados son

$$E_{n,+} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_C + \hbar\frac{\omega_A}{2} + (n+1)\hbar\frac{\gamma^2}{\Delta}$$

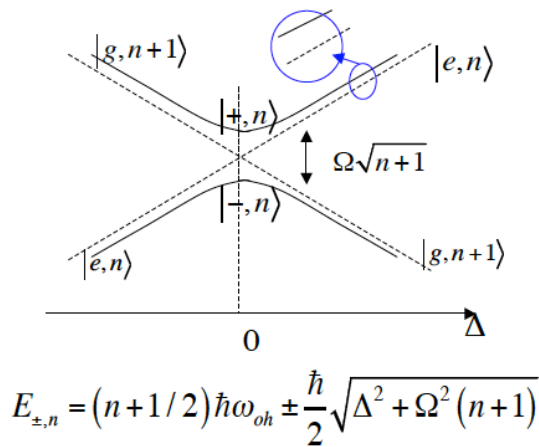
$$E_{n,-} = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega_C - \hbar\frac{\omega_A}{2} - (n+1)\hbar\frac{\gamma^2}{\Delta}$$

En cambio, si la desintonía es negativa el orden de las energías se invierte ya que $E_{n,-} \geq E_{n,+}$ y el estado de mayor energía es $|g, n+1\rangle$ en lugar de $|e, n\rangle$. En ese caso

$$E_{n,+} = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega_C - \hbar\frac{\omega_A}{2} - (n+1)\hbar\frac{\gamma^2}{|\Delta|}$$

$$E_{n,-} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_C + \hbar\frac{\omega_A}{2} + (n+1)\hbar\frac{\gamma^2}{|\Delta|}$$
(5)

La dependencia general de la energía en función de la desintonía puede verse en la figura en la que también se incluyen los autoestados en los casos límites.



$$E_{\pm, n} = (n+1/2)\hbar\omega_{oh} \pm \frac{\hbar}{2}\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2(n+1)}$$

FIG. 2 Los niveles de energía del Hamiltoniano de Jaynes Cummings en función de la desintonía. En el caso resonante los autoestados son combinaciones lineales de $|e, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$ mientras que en el caso de alta desintonía los autoestados son estos dos vectores (dependiendo del signo de la desintonía, uno u otro puede ser el de mas baja energía).

Es importante notar que en este límite, la interacción entre el átomo y el campo no modifica los autoestados del Hamiltoniano (que siguen siendo aproximadamente los autoestados de H_0). El efecto no-trivial de la interacción es cambiar la energía de estos estados. El cambio en la energía es no trivial ya que depende del número de fotones y del estado del átomo. Para $\Delta \geq 0$ para cada uno de los estados $|e, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$ podemos calcular la diferencia entre el autovalor de H_T y el autovalor de H_0 . Este es el cambio en la energía de los estados debido a la interacción con el campo. A partir de las expresiones anteriores es fácil ver que

$$\Delta E_{e,n} = E_{+,n} - E_{e,n}^{(0)} = \hbar\frac{\gamma^2}{\Delta}(n+1)$$

$$\Delta E_{g,n} = E_{-,n-1} - E_{g,n}^{(0)} = -\hbar\frac{\gamma^2}{\Delta}n,$$

La última expresión muestra que para $n=0$ la energía del estado fundamental $|g, 0\rangle$ no cambia (o sea, $\Delta E_{g,0} = 0$).

L. El corrimiento de Lamb y el desfase inducido por cada fotón

De este resultado observamos un fenómeno bastante notable: En ausencia de fotones, la energía del estado excitado del átomo cambia: O sea, la energía del estado $|e, 0\rangle$ no es el autovalor de H_0 . El vacío electromagnético produce un cambio en la energía del nivel $|e\rangle$. En efecto, para $n=0$ vemos que el corrimiento de la energía del estado $|e\rangle$ es

$$\Delta E_{e,0} = \hbar\frac{\gamma^2}{\Delta}$$

Este cambio de energía debido a la interacción del átomo con el campo en el estado de vacío se denomina corrimiento de Lamb.

Por otra parte, vemos que en presencia de n fotones, los estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$ se desfasan a un ritmo que es igual a $\xi = 2\gamma^2/\Delta$ por cada fotón presente en la cavidad. En efecto, ξ es el corrimiento de fase por fotón. Este resultado es muy importante desde el punto de vista físico y tiene una gran cantidad de aplicaciones que analizaremos en los siguientes ejercicios.

Para resumir en el caso no resonante (que también se denomina, el caso de interacción dispersiva), podemos escribir la evolución de los vectores de la base \mathcal{B}_n como

$$|e, n\rangle \rightarrow e^{-i\frac{E_{e,n}^{(0)}}{\hbar}t} |e, n\rangle e^{-i\frac{\gamma^2}{\Delta}(n+1)t}$$

$$|g, n\rangle \rightarrow e^{-i\frac{E_{g,n}^{(0)}}{\hbar}t} |g, n\rangle e^{+i\frac{\gamma^2}{\Delta}nt}.$$
(6)

Podemos reescribir esto de una manera diferente, absorbiendo el corrimiento Lamb en un nuevo Hamiltoniano H'_0 que está definido como $H'_0 = H_0 + \hbar\frac{\gamma^2}{\Delta}|e\rangle\langle e|$. En este caso, las expresiones anteriores se reducen a

$$|e, n\rangle \rightarrow e^{-i\frac{E'_{e,n}{}^{(0)}}{\hbar}t} |e, n\rangle e^{-i\frac{\gamma^2}{\Delta}nt}$$

$$|g, n\rangle \rightarrow e^{-i\frac{E'_{g,n}{}^{(0)}}{\hbar}t} |g, n\rangle e^{+i\frac{\gamma^2}{\Delta}nt}.$$
(7)

A partir de estas expresiones, resulta evidente que si pasamos a una representación de interacción con el Hamiltoniano libre H'_0 (es decir, si definimos los estados $|\tilde{\phi}\rangle = \exp(iH'_0 t/\hbar)|\phi\rangle$) los estados en esa representación evolucionan como

$$|\tilde{e}, \tilde{n}\rangle \rightarrow |\tilde{e}, \tilde{n}\rangle e^{-i\frac{\gamma^2}{\Delta}nt}$$

$$|\tilde{g}, \tilde{n}\rangle \rightarrow |\tilde{g}, \tilde{n}\rangle e^{+i\frac{\gamma^2}{\Delta}nt}.$$
(8)

O sea, la interacción con el campo, introduce un desfase entre los estados $|e, n\rangle$ y $|g, n\rangle$ que es igual a $2\gamma^2/\Delta$ por cada fotón presente en la cavidad. En este caso, el operador de evolución en la base formada por los vectores $\{|g, 0\rangle, |e, 0\rangle, |g, 1\rangle, |e, 1\rangle\}$ es

$$U_{NR}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix},$$

$$\phi = \frac{\gamma^2}{\Delta} t$$

En la representación de Schroedinger, la evolución del sistema formado por el átomo y el campo puede obtenerse combinando tres operaciones: dos operaciones "locales" que afectan al átomo y al campo por separado y una interacción que está descrita por el operador U_{NR} . Es decir:

$$U(t) = (U_{0,A} \otimes \mathbb{1}_C) \times (\mathbb{1}_A \otimes U_{0,C}) \otimes U_{NR}$$

donde $U_{0,A} = \exp(-iH_0^A t/\hbar)$ y $U_{0,C} = \exp(-i\omega_C t(n + 1/2))$.

M. Evidencia directa de la cuantización del campo electromagnético

La primera evidencia directa de la cuantización del campo electromagnético (la existencia de estados de Fock con un número entero de fotones) fue obtenida en un experimento notable de Serge Haroche y sus colaboradores (ver Phys. Rev. Lett. (1996) y Physics Today (1997)). El experimento puede describirse y comprenderse utilizando los elementos que vimos hasta aquí. Consideramos un átomo de dos niveles que inicialmente es preparado en el estado $|\phi_A(0)\rangle = |e\rangle$ (este estado puede prepararse a partir del estado $|g\rangle$ aplicando un pulso apropiado en la zona de Ramsey R_1). Por su parte, el estado inicial del campo en la cavidad es un estado coherente $|\alpha\rangle$ (que puede prepararse a partir del estado de vacío $|0\rangle$ aplicando un campo de radio frecuencias en la cavidad, tal como se describe mas arriba). En consecuencia el estado del sistema compuesto por el átomo y el campo es

$$|\psi_{AC}(0)\rangle = |e\rangle \otimes |\alpha\rangle$$

El átomo atraviesa la cavidad en la que está almacenado el campo. El átomo y la cavidad están en resonancia (o sea $\Delta = \omega_A - \omega_C = 0$). El tiempo de tránsito del átomo en la cavidad (que denotaremos como t) puede ser controlado variando la velocidad del haz de átomos. En lo que sigue veremos que midiendo el estado del átomo a la salida podemos obtener una señal clara de la estadística de los fotones dentro de la cavidad y demostrar que dicha estadística corresponde a la distribución de Poisson que caracteriza univocamente a los estados coherentes. Analizaremos esta situación en las siguientes etapas:

1. Primero calcularemos el estado del sistema formado por el átomo y el campo después de un tiempo de interacción t . En el instante inicial, el estado del átomo y el campo es $|\Psi_{AC}(0)\rangle = |e\rangle_A \otimes |\alpha\rangle_C$. Teniendo en cuenta que

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Este estado puede reescribirse como

$$|\Psi_{AC}(0)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |e, n\rangle.$$

Como vimos mas arriba, un estado inicial $|e, n\rangle$ evoluciona en una combinación lineal de los estados $|e, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$. La frecuencia de dicha oscilación es $\Omega_n = \gamma\sqrt{n+1}$. Por lo tanto, el estado del sistema compuesto resulta ser

$$|\Psi_{AC}(t)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} (\cos(\Omega_n t) |e, n\rangle + \sin(\Omega_n t) |g, n+1\rangle).$$

Por lo tanto, el campo y el átomo están en un estado entrelazado. :

2. Calculemos ahora la probabilidad de detectar al átomo en el estado $|e\rangle$ (esta medición se realiza en el detector que ioniza selectivamente al átomo y que produce una señal sólo si el átomo está en el estado $|e\rangle$).

Para obtener la probabilidad de detectar al átomo en el estado $|e\rangle$ debemos calcular el valor medio del proyector $P_e = |e\rangle\langle e| \otimes \mathbb{1}$ en el estado del conjunto átomo-campo. Esto es:

$$\text{Prob}(|e\rangle, t) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n \geq 0} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos^2(\Omega_n t). \quad (9)$$

Esta probabilidad depende de α y del tiempo de interacción. En particular, para $\alpha = 0$ el único término que contribuye en la sumatoria es el $n = 0$. En efecto, en ese caso tenemos que la probabilidad oscila con una frecuencia Ω_0 :

$$\text{Prob}(|e\rangle, t)|_{\alpha=0} = \cos^2(\Omega_0 t).$$

Estas oscilaciones son inducidas por la interacción entre el átomo y el vacío electromagnético y se denominan "oscilaciones de Rabi de vacío". Fueron observadas por primera vez en 1996. Para otros valores de α la probabilidad de detección del átomo en el estado $|e\rangle$ nos brinda una gran información. En efecto, cada autovalor del operador número en la cavidad contribuye con un término que depende del tiempo con una frecuencia característica Ω_n que depende de n por vía de la relación $\Omega_n = \gamma\sqrt{n+1}$.

Para revelar estas contribuciones debemos medir la probabilidad para distintos tiempo y luego calcular la transformada de Fourier de esta señal. De este modo obtenemos directamente la función $p_n(\alpha)$ definida como aquella tal que $\text{Prob}(|e\rangle, t) = \sum_{n \geq 0} p_n(\alpha) \cos^2(\Omega_n t)$. Una vez medida esta función, podemos ver cual es el valor de α que mejor ajusta la función medida con la que se parametriza de la siguiente manera $p_n(\alpha) = \exp(-|\alpha|^2) |\alpha|^{2n} / n!$ (la distribución de Poisson). Es interesante graficar esta función para distintos valores de α (razonablemente chicos) y compararlos con el resultado experimental reportado en el paper de Brune et al (PRL 1996). Los resultados experimentales se muestran en la figura que sigue:

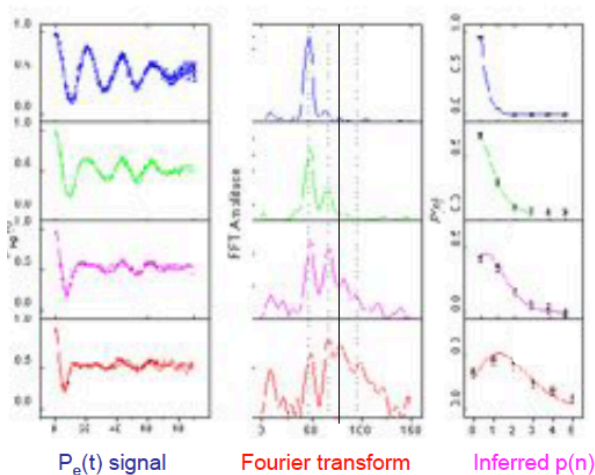


FIG. 3 La probabilidad de detectar al átomo en el estado $|e\rangle$ luego de un tiempo t a partir de un estado coherente en la cavidad. El átomo y la cavidad están en resonancia. La probabilidad medida revela directamente la probabilidad de medir n fotones en un estado coherente. Todos los resultados pueden ser ajustados por la distribución de Poisson con un único parámetro libre (α). En la figura las distintas filas corresponden a distintos valores de α que van desde $\alpha = 0$ (fila superior) hasta $\alpha = 1.7$ (fila inferior).

N. Cómo entrelazar dos átomos distantes?

Consideremos dos átomos A_1 y A_2 . Veremos que usando los dispositivos descriptos mas arriba es posible preparar el siguiente estado entrelazado entre los dos átomos:

$$|\phi_{A_1, A_2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1, g_2\rangle - |g_1, e_2\rangle).$$

Para hacerlo usaremos un haz de dos átomos que no interactúan directamente entre si. Además usaremos una cavidad ideal que resuena con ambos átomos. Los átomos atraviesan la cavidad de a uno e interactúan con el campo electromagnético almacenado en la misma cavidad.

Supondremos que el estado del campo electromagnético dentro de la cavidad es inicialmente el vacío: $|\Psi_C(0)\rangle = |0\rangle$. En primer lugar preparamos al primer átomo en un estado $|\Psi_1(0)\rangle = |e_1\rangle$ (tal como explicamos mas arriba, podemos preparar este estado a partir de $|g\rangle$ usando una zona de Ramsey con el campo apropiadamente elegido). Este átomo pasa por la cavidad durante un tiempo tal que la interacción genera un operador de evolución $U_n(\pi/2)$ (un pulso $-\pi/2$). Teniendo en cuenta que el estado del campo es el vacío, el operador de evolución es $U_0(\pi/2)$ definido mas arriba. Al finalizar la interacción el estado del sistema formado por el primer átomo y la cavidad es:

$$|\Psi_{A_1, C}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1, 0\rangle + |g_1, 1\rangle).$$

Una vez producido este estado, se hace incidir al segundo átomo en la cavidad. Este átomo se prepara en el estado $|g_2\rangle$. En ese caso se elige el tiempo de interacción tal que el operador de evolución temporal es $U_0(\pi)$ (un pulso π). En ese caso el estado del conjunto formado por los dos átomos y la cavidad evolucionará de la siguiente manera

$$\begin{aligned} |\Psi_{A_2, A_1, C}\rangle &= |g_2\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1, 0\rangle + |g_1, 1\rangle) \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_2, e_1, 0\rangle - |e_2, g_1, 0\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_2, e_1\rangle - |e_2, g_1\rangle) \otimes |0\rangle_C \end{aligned}$$

En este esquema, el estado final del campo en la cavidad es el estado de vacío (o sea, el estado final del campo es igual al estado inicial). En efecto, el único rol del campo es actuar de intermediario entre los dos átomos. Los átomos se entrelazan pese a que no interactúan directamente entre si. Su interacción está mediada por el campo en la cavidad.

O. Cómo entrelazar el campo electromagnético entre dos cavidades distantes

Este experimento, a diferencia de los anteriores, es un experimento imaginario ya que todavía no ha sido posible construir un dispositivo con dos cavidades que funcione apropiadamente (manteniendo la coherencia cuántica por un tiempo razonablemente largo). Suponiendo que tenemos dos cavidades a nuestra disposición veremos como podemos preparar un estado del campo electromagnético que sea

$$|\Psi_{C_1, C_2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1, 1_2\rangle + |1_1, 0_2\rangle).$$

Para preparar este estado vamos a utilizar un único átomo, que atraviesa las dos cavidades. Nuevamente, no hay interacciones directas entre los fotones en ambas cavidades pero hay interacciones de ambos con el

átomo. De este modo, el átomo actúa como mediador de la interacción entre los campos almacenados en ambas cavidades.

Supondremos que las dos cavidades son idénticas y ambas resuenan con el átomo. El estado inicial del campo electromagnético dentro de ambas cavidades es vacío:

$$|\Psi_{C_1, C_2}\rangle = |0_1, 0_2\rangle.$$

En primer lugar preparamos al átomo en el estado $|\phi_A\rangle = |e\rangle$ (que se obtiene a partir de $|g\rangle$ usando la zona de Ramsey). Luego el átomo pasa por la primera cavidad durante un tiempo tal que la interacción entre ambos genera un operador de evolución temporal $U_0(\frac{\pi}{2})$ (un pulso $\pi/2$). Al finalizar la interacción entre el átomo y la primera cavidad, el estado del sistema formado por el átomo y las dos cavidades es:

$$|\Psi_{A, C_1, C_2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0_1, 0_2\rangle + |g, 1_1, 0_2\rangle).$$

Seguidamente enviamos el mismo átomo por la segunda cavidad de modo tal que la interacción entre ambos es un pulso π , o sea, el operador de evolución temporal es $U_0(\pi)$ definido mas arriba. El estado del sistema compuesto por el átomo y las dos cavidades se transforma en:

$$\begin{aligned} |\Psi_{A, C_1, C_2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, 0_1, 1_2\rangle + |g, 1_1, 0_2\rangle) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}}|g\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1, 1_2\rangle + |1_1, 0_2\rangle) \quad (10) \end{aligned}$$

Es decir, el estado final del átomo es $|g\rangle$ lo cual implica que el átomo entrega su energía para producir un fotón. Pero ese fotón no está en una cavidad o en la otra sino en ambas a la vez. El estado es, en algún sentido, el estado análogo a uno en el cual la luz está encendida "aquí y allá".

P. Cómo transferir el estado de un átomo a la cavidad (y viceversa)

Supongamos que tenemos un átomo en un estado arbitrario y una cavidad vacía. Es decir, el estado inicial del sistema conjunto es

$$|\psi_{AC}(0)\rangle = (\alpha|e\rangle + \beta|g\rangle) \otimes |0\rangle$$

Es fácil ver que si el átomo atraviesa la cavidad de modo tal que la evolución es un pulso π , que está descrito por el operador $U_0(\pi)$, el estado final resulta ser

$$|\psi_{AC}(t)\rangle = |g\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

Es decir, esta operación "transfiere" el estado del átomo a la cavidad. El estado final del átomo es $|g\rangle$ y el de la cavidad está definido por los coeficientes arbitrarios α y β .

La operación inversa es también obviamente válida. Si tenemos un estado inicial de la forma

$$|\psi'_{AC}(0)\rangle = |g\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle),$$

entonces la aplicación de un pulso π dará lugar al estado

$$|\psi'_{AC}(t)\rangle = (\alpha|g\rangle - \beta|e\rangle) \otimes |0\rangle.$$

El signo negativo en el segundo término de la ecuación anterior no es un problema: si en lugar de un pulso π aplicamos un pulso 3π tendremos que el signo se transforma y el estado del átomo resulta ser $\alpha|g\rangle + \beta|e\rangle$.

Q. Cómo detectar un fotón sin absorberlo?

Usando los ingredientes introducidos hasta ahora podemos desarrollar un método novedoso para detectar fotones. En efecto, las técnicas que se utilizan habitualmente para detectar fotones se basan en que la energía transportada por estos es absorbida y genera una corriente eléctrica (esto ocurre en un fotodetector). Pero, naturalmente, el fotón desaparece al ser detectado ya que es absorbido. Hasta el surgimiento de las técnicas descritas en este capítulo no existían métodos que permitieran detectar la presencia de un fotón sin absorberlo. Veremos aquí cómo es posible hacer esto. Este avance representa no solamente un adelanto tecnológico sino también un avance conceptual.

Considere una cavidad ideal tal que el estado inicial del campo electromagnético tiene un número de fotones bien definido (por ejemplo, un único fotón, pero el método se aplica a estados de n fotones). Veremos que después de la detección, el estado del campo sigue teniendo el mismo número de fotones.

La medición no destructiva del número de fotones en la cavidad puede realizarse utilizando un átomo de dos niveles. El átomo es preparado inicialmente en un estado

$$|\Psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle).$$

Este estado, como siempre, puede ser preparado a partir del estado $|g\rangle$ mediante la aplicación de un campo apropiadamente elegido en una zona de Ramsey. El estado del átomo y la cavidad es

$$|\Psi_{A, C}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle) \otimes |n\rangle.$$

Supongamos que la desintonía entre la cavidad y el átomo es alta (es decir, que la frecuencia del átomo es muy diferente de la de la cavidad, $\Delta \gg \max(|\omega_A|, |\omega_C|)$). Como vimos, en este caso los estados $|e, n\rangle$ y $|g, n\rangle$ son autoestados del Hamiltoniano total pero tienen una fase diferente, que depende de n de manera no trivial. Por lo tanto, el estado completo del átomo y la cavidad, luego de un tiempo t es (a menos de una fase global)

$$\begin{aligned} |\Psi_{A, C}(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\frac{\omega_A}{2}t - i(n+1)\frac{\Delta}{2}t}|e\rangle \\ &+ e^{i\frac{\omega_A}{2}t + in\frac{\Delta}{2}t}|g\rangle) \otimes |n\rangle \end{aligned}$$

Después de atravesar la cavidad, el átomo ingresa en una nueva zona de Ramsey en la cual se induce un operador de evolución temporal (mediante la aplicación de un pulso de radiofrecuencias) que transforma los estados atómicos $|e\rangle$ y $|g\rangle$ en $(|e\rangle \pm |g\rangle)/\sqrt{2}$ respectivamente). , el estado luego de esta operación (que se hace sobre el átomo una vez que este sale de la cavidad) es:

$$\begin{aligned} |\Psi_{A,C}(t')\rangle &= e^{-i\frac{\gamma^2}{2\Delta}t} \left(\cos\left(\frac{\omega_A}{2}t + \frac{\gamma^2}{\Delta}\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)|e\rangle \right. \\ &\quad \left. + i \sin\left(\frac{\omega_A}{2}t + \frac{\gamma^2}{\Delta}\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)|g\rangle \right) \otimes |n\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de detectar al átomo en el estado $|e\rangle$ es

$$\text{Prob}(|e\rangle, t) = \cos^2\left(\frac{\omega_A}{2}t + \frac{\gamma^2}{\Delta}\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right). \quad (11)$$

Entonces, midiendo esta probabilidad como función del tiempo t , podemos extraer directamente la información sobre el número de fotones n . Para hacer esto debemos enviar átomos idénticamente preparados que atraviesan la cavidad de a uno a la vez. En todos los casos, el número de fotones dentro de la cavidad permanece constante. Por ese motivo, este procedimiento constituye una medición no destructiva del número de fotones (que no demuele al estado).

III. CLASES 13: TELEPORTACIÓN: CIENCIA FICCIÓN O FÍSICA?

En este capítulo analizaremos en detalle las características de uno de los procesos más notables que permite la mecánica cuántica: la teleportación (o teletransportación). En su versión "mágica" este proceso es descrito como uno por el cual un objeto (un ser humano) ingresa a un laboratorio en algún lugar del espacio (Laboratorio A) y tras desvanecerse se reconstruye en otro laboratorio distante (Laboratorio B). Esta versión mágica puede verse, por ejemplo, en la serie "Star Trek". En apariencia, el objeto se materializa nuevamente en B, donde aparentemente reaparece "de la nada". Esta versión mágica es obviamente incompatible con las leyes de la física: la materia no puede aparecer de la nada. Veremos que, para que haya teletransportación en primer lugar debe haber transporte de materia entre A y B. Este transporte debe involucrar materia en un estado especial: un estado entrelazado. Este es el sostén material requerido por la teleportación. Una vez que se establece este "canal", formado por materia entrelazada (distribuida entre A y B, sin que se rompa el entrelazamiento en el proceso de distribución) el mismo puede ser usado para teletransportar. En resumen: el entrelazamiento permite la teleportación. El procedimiento es simple y puede ser descrito en palabras del siguiente modo (veremos el detalle del procedimiento más adelante): a) Se establece un canal de materia entrelazada, distribuida entre A y B; b) En el laboratorio A ingresa un objeto a teleportar, que está preparado en un estado cuántico desconocido (obviamente hay una sola copia del objeto, asique el estado no puede ser determinado experimentalmente ya que para eso necesitaríamos un gran número de copias de objetos preparados de manera idéntica). c) En el laboratorio A se realiza una medición proyectiva que determina alguna propiedad conjunta de la materia presente en dicho laboratorio (en el que conviven el objeto a teleportar y la materia entrelazada con aquella que se encuentra en B). En el caso de la teleportación de un spin, es necesario distribuir un par de spins en algún estado de Bell y luego realizar una medición proyectiva sobre la base de Bell de los spins presentes en A. d) El resultado de la medición realizada es enviado de manera clásica (por vía de una comunicación telefónica, por ejemplo) entre A y B, e) Una vez que B recibe la información sobre el resultado, r de la medición, realiza un aoperación unitaria U_r en su laboratorio de modo tal que una vez aplicada dicha operación, la materia presente en ese laboratorio queda preparada en el mismo estado cuántico en el que se encontraba el objeto que ingresó al laboratorio A.

En síntesis, para teleportar hace falta materia entrelazada distribuida entre dos sitios distantes (la estación de partida y la de llegada). Y lo que se teleporta no es la materia sino el estado cuántico en el que ella se encuentra. Este procedimiento fue propuesto originalmente por un quinteto de físicos muy originales en 1993 (Bennett,

Brassard, Josza, Peres y Wootters) y fue demostrado en experimentos notables en varios dispositivos físicos. A diferencia de la versión mágica en la que la materia parece aparecer de la nada, en esta versión "física" de la teleportación la materia está en el laboratorio B (y en A) antes de la llegada del objeto a teleportar. O sea, nada se origina de la nada. El procedimiento, notablemente, reorganiza la materia en B de modo tal que adquiere la identidad deseada, sin que en el proceso aprendamos nada sobre cuál es esa identidad. Uno de los creadores de esta idea, Asher Peres, dictó una conferencia en la Universidad de California en Santa Barbara durante uno de los workshops que más contribuyeron al desarrollo de la "Información cuántica". Tuve la oportunidad de asistir a esa conferencia, que estaba orientada al público general. A la hora de las preguntas, un señor le preguntó a Asher, provocativamente: "Usted piensa que alguna vez llegaremos a teleportar el alma?". Asher Peres, que era un hombre de un sentido del humor comparable a su enorme inteligencia, le contestó: "Sólo teleportamos el alma!". Esa metáfora captura parte de la esencia de la teleportación, que es un proceso en el cual la materia pre-existente adquiere la identidad (el estado cuántico, que sin duda es el "alma" de la mecánica cuántica) del objeto deseado.

En este capítulo, describiremos en detalle como deberíamos proceder para teleportar un átomo entre dos cavidades distantes. Si bien este experimento todavía no fue hecho, la propuesta presentada en 1996 por Davidovich, Haroche y otros, no solamente es realista sino que utiliza la misma física que la que describimos en el capítulo anterior.

A. La evolución temporal representada como un circuito. Operaciones elementales.

Introduciremos una notación gráfica que es muy conveniente a la hora de describir la evolución temporal de un sistema sobre el cual se ejecutan diversas acciones. Estas acciones externas obligan al sistema a evolucionar de una determinada manera durante un cierto tiempo. Típicamente estas acciones corresponden a prender o apagar campos externos tales como aquellos que generan oscilaciones de Rabi sobre un sistema de dos niveles. También pueden corresponder a prender o apagar interacciones entre dos sistemas físicos. El ejemplo típico es el que vimos en el capítulo anterior: un átomo que atraviesa una cavidad e interactúa con el campo electromagnético atrapado en ella. En ese caso la interacción solamente tiene lugar durante un cierto tiempo, que es aquel durante el cual el átomo está en la zona central de la cavidad. Para todos estos sistemas es útil pensar al operador de evolución como el producto (la composición) de operadores que corresponden a la evolución durante una etapa elemental en la cual la dinámica es de un cierto tipo. El operador de evolución total será entonces el producto de operadores elementales, durante los cuales el

sistema evoluciona de manera relativamente simple. En estos casos es útil representar la dinámica mediante un circuito tal como el que aparece en la figura. En esos circuitos cada cable representa un sistema elemental, uno de los componentes del sistema completo. Por ejemplo, para un sistema compuesto por la colección de n sistemas de espín $1/2$ tendremos n cables. En el circuito el tiempo fluye de izquierda a derecha y la evolución se obtiene aplicando secuencialmente los operadores que aparecen de izquierda a derecha al estado inicial $|\psi_{in}\rangle$ que figura a la izquierda del circuito. Se tenemos k operaciones elementales U_1, \dots, U_k entonces $U_T = U_1 \times \dots \times U_k$ y el estado final será $|\psi_{out}\rangle = U_T |\psi_{in}\rangle$

En lo que sigue, usaremos dos operaciones "elementales": a) La transformación de Hadamard U_H (o simplemente H , que no debe confundirse con un Hamiltoniano!) y b) La transformación no-controlada o U_{CN} que describiremos mas abajo.

La transformación de Hadamard se define como $U_H = -i\sigma_x e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_y}$. Las propiedades de las matrices de Pauli implican que este operador es simplemente $U_H = -i(\sigma_z + \sigma_x)/\sqrt{2}$. Es decir, que en forma matricial tenemos

$$U_H = \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esta transformación se puede inducir fácilmente sobre un sistema de spin $1/2$ con dos pulsos sucesivos que induzcan, respectivamente, una rotación en $\pi/2$ alrededor del eje \vec{e}_y y luego otra en π alrededor del eje \vec{e}_x . Para el caso de un átomo que atraviesa una zona de Ramsey este procedimiento es análogo al anterior. En consecuencia, la operación U_H es una operación físicamente realizable de manera sencilla.

La siguiente operación que usaremos es U_{CN} que es un operador unitario definido mediante la siguiente tabla (definición por extensión):

$$\begin{aligned} U_{CN}|0,0\rangle &= |0,0\rangle & U_{CN}|0,1\rangle &= |0,1\rangle \\ U_{CN}|1,0\rangle &= |1,1\rangle & U_{CN}|1,1\rangle &= |1,0\rangle \end{aligned}$$

La acción de este operador pone en evidencia el motivo para su nombre: El estado del segundo sistema cambia (o es "negado" o invertido) si el primer sistema está en el estado $|1\rangle$ mientras que permanece invariante si el primer sistema (el control) está en el estado $|0\rangle$. Es una operación de negación sobre el segundo qubit (el blanco), que está controlada por el primer qubit. Es fácil ver que el operador U_{CN} no es otra cosa que

$$U_{CN} = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x.$$

Un operador íntimamente relacionado con este último es uno en el cual dependiendo del estado del sistema de control, se aplica el operador $(-i\sigma_x)$ al sistema blanco. Esto es:

$$\begin{aligned} U_{CN'} &= |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} - i|1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x. \\ U_{CN'} &= \exp(-i\frac{\pi}{2} |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x) \end{aligned} \quad (12)$$

La expresión anterior nos muestra cómo es posible obtener el operador $U_{CN'}$ a partir de un Hamiltoniano: Si el Hamiltoniano es $H_{CN'} = \gamma|1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x = \frac{\gamma}{2}(\mathbb{1} - \sigma_z) \otimes \sigma_x$ y el tiempo de aplicación es tal que $\gamma t = \pi/2$ entonces la evolución está descrita por $U_{CN'}$.

Otra manera de obtener una compuerta U_{CN} es utilizar otra compuerta elemental que podemos llamar U_{CZ} que aplica el operador σ_z al blanco si el estado del control es $|1\rangle$. Es decir,

$$U_{CZ'} = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_z.$$

Es simple demostrar que U_{CN} se obtiene aplicando U_{CZ} y operadores de Hadamard:

$$U_{CN} = (\mathbb{1} \otimes H) \times U_{CZ} \times (\mathbb{1} \otimes H)$$

(lo cual surge simplemente de observar que $H\sigma_z H = \sigma_x$, y $H^2 = \mathbb{1}$).

Así como podemos obtener U_{CN} a partir de U_{CZ} , podríamos obtener $U_{CN'}$ a partir de $U_{CZ'}$, que es aquella compuerta que aplica el operador $(i\sigma_z)$ si el sistema de control está en el estado $|1\rangle$. Es decir

$$U_{CZ''} = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + i|1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_z.$$

Evidentemente $U_{CZ'}$ puede obtenerse a partir de un Hamiltoniano de la forma $H_{CZ'} = \frac{\gamma}{2}(\mathbb{1} - \sigma_z) \otimes \sigma_z$. A partir de ella obtenemos $U_{CN'}$ como

$$U_{CN'} = (\mathbb{1} \otimes H) \times U_{CZ'} \times (\mathbb{1} \otimes H)$$

Cabe aclarar que el uso de operaciones U_{CN} y U_H está muy extendido en la literatura y resultan muy convenientes a la hora de diseñar secuencias de operaciones para cumplir algún fin (como el que veremos mas abajo: medir en la base de Bell). Sin embargo, vale la pena notar que estas operaciones no pueden obtenerse a partir de un Hamiltoniano ya que son operadores unitarios cuyo determinante es igual a -1 . En cambio, $U_{CN'}$ y $U_{CZ''}$ son operadores físicamente realizables ya que su determinante es igual a la unidad (y por lo tanto están conectadas continuamente con el operador identidad y corresponden a una evolución temporal generada por un Hamiltoniano).

Veremos mas abajo cómo construir estas compuertas (o sea, estos operadores de evolución temporal) en un sustrato físico simple en el que los sistemas de dos niveles están representados en átomos y en el estado del campo en una cavidad. Pero antes de eso, veamos que a partir de estas operaciones es simple construir dispositivos que preparen cualquier de los estados de Bell así como también aparatos para medir en esa base.

B. Preparación y medición de estados de Bell

La preparación de estados de Bell es una operación relativamente sencilla. Puede obtenerse componiendo simplemente las operaciones elementales U_H y U_{CN} tal como

indica la figura. El proceso por el cual creamos estados de Bell es uno por el cual obtenemos los estados $|\beta\rangle_{m_1, m_2}$ (que son autoestados comunes de los operadores $M_1 = \sigma_x \otimes \sigma_x$ y $M_2 = \sigma_z \otimes \sigma_z$ con autovalores m_1 y m_2) a partir de los estados $|i, j\rangle$ donde $i, j = 0, 1$. Es decir, la preparación de los estados de Bell se realiza aplicando el operador unitario que cambia de base y lleva de la base de autoestados comunes de $\sigma_z \otimes \mathbb{1}$ y $\mathbb{1} \otimes \sigma_z$ a la base de autoestados comunes de M_1 y M_2 . Llamaremos U_{Bell} a este operador de cambio de base.

En lo que sigue demostraremos que el operador U_{Bell} se obtiene componiendo $U_H \otimes \mathbb{1}$ y U_{CN} , es decir: $U_{Bell} = U_{CN} \times (U_H \otimes \mathbb{1})$. Para ver esto, analicemos como actúa este operador sobre cualquier estado $|i, j\rangle$. En la primera etapa tenemos que

$$\begin{aligned} |\phi_{i,j}\rangle &= (U_H \otimes \mathbb{1})|i, j\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^i|1\rangle) \otimes |j\rangle \end{aligned}$$

Finalmente, cuando aplicamos el operador U_{CN} (en el que el primer espín actúa como control y el segundo como blanco) obtenemos

$$\begin{aligned} |\beta_{i,j}\rangle &= U_{CN} \times (U_H \otimes \mathbb{1})|i, j\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |j\rangle + (-1)^i|1\rangle \otimes |1 \oplus j\rangle), \end{aligned}$$

donde el símbolo \oplus indica la suma de enteros módulo 2. Es evidente que estos estados son los estados de Bell. En efecto, para el estado $|\beta_{i,j}\rangle$ los autovalores de M_1 y M_2 son $m_1 = (-1)^i$ y $m_2 = (-1)^j$. Por consiguiente, recordando la notación usada en capítulos anteriores, tenemos que $|\beta_{0,0}\rangle = |\Phi_+\rangle$, $|\beta_{1,1}\rangle = |\Psi_-\rangle$, $|\beta_{1,0}\rangle = |\Phi_-\rangle$ y $|\beta_{0,1}\rangle = |\Psi_+\rangle$.

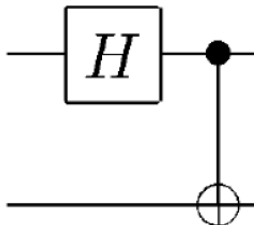


FIG. 4 Esquema para preparar estados de Bell usando dos operaciones "elementales"

En consecuencia, para preparar los estados de Bell hay que lograr que los dos sistemas de espín 1/2 interactúen de forma tal que el operador es U_{Bell} .

Para medir simultáneamente los observables M_1 y M_2 hay que realizar el proceso inverso al que seguimos para preparar los estados de Bell. En efecto, si tenemos un estado de Bell $|\beta_{i,j}\rangle$ y aplicamos el operador U_{Bell}^{-1} entonces obtendremos el estado $|i, j\rangle$. Por lo tanto, este operador (el inverso de U_{Bell} hace el cambio de base inverso al anterior. Por consiguiente, si aplicamos U_{Bell}^{-1} y luego medimos la componente \vec{e}_z de cada espín, obtenemos la

información sobre cual de los cuatro estados de Bell ingresó al aparato. Un medidor en la base de Bell no es otra cosa que dos detectores de Stern Gerlach con el imán orientado en la dirección \vec{e}_z precedido por la aplicación de U_{Bell}^{-1} . Este operador hace las veces de un "transductor" que transforma la señal que deseamos medir (M_1 y M_2) en aquella que podemos medir con dos aparatos de Stern Gerlach ordinarios (que miden $\sigma_z \otimes \mathbb{1}$ y $\mathbb{1} \otimes \sigma_z$). El esquema de detección se representa en la figura que aparece mas abajo.

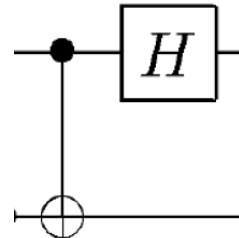


FIG. 5 Para medir en base de Bell (medir los operadores M_1 y M_2 definidos mas arriba. Se pueden usar las mismas operaciones necesarias para crear estados de Bell en orden inverso.

C. La teleportación

El procedimiento que se conoce con el nombre de teleportación fue ideado en 1993 por Bennett, Brassard, Josza, Peres y Wootters (BBJPW) y consiste en lo siguiente. El objetivo es lograr que si en un laboratorio ingresa un objeto (un espín 1/2) preparado en un estado arbitrario, después de un cierto tiempo (compatible con todos los requisitos de causalidad) aparezca un objeto idéntico en otro laboratorio distante (o sea, un espín 1/2 preparado en el mismo estado que el original). En el camino, el estado permanece desconocido.

Sean A y B dos laboratorios distantes. En primer lugar supondremos que se prepara un par de spines en un estado entrelazado, que puede ser alguno de los estados de Bell. Para fijar ideas usaremos el estado $|\Psi_-\rangle = |\beta_{1,1}\rangle = (|0, 1\rangle - |1, 0\rangle)/\sqrt{2}$. Cada uno de los miembros del par entrelazado es enviado a un laboratorio (o sea, en el laboratorio A está uno de los miembros del par y en el laboratorio B está el otro). Este recurso, un par de partículas en un estado entrelazado, es absolutamente necesario para ejecutar el procedimiento que permite teleportar. Las partículas entrelazadas serán etiquetadas con los índices 1 (la del laboratorio A) y 2 (aquella que está en B). Como dijimos, este recurso (el par de partículas entrelazadas) es imprescindible para la teleportación.

En el laboratorio A ingresa una tercera partícula (que llamaremos partícula 3) en un estado desconocido $|\phi_3\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Es decir el estado inicial del sistema formado

por las tres partículas es

$$|\Psi_{1,2,3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle_{1,2} - |1,0\rangle_{1,2}) \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_3.$$

Este estado puede reescribirse agrupando los sistemas que están en el laboratorio A y aquellos que están en el laboratorio B . En el primer laboratorio están las partículas 1 y 3 mientras que en el laboratorio B está la partícula 2. Entonces, el estado puede escribirse como

$$|\Psi_{1,2,3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0,0\rangle_{1,3}|1\rangle_2 - \alpha|1,0\rangle_{1,3}|0\rangle_2 + \beta|0,1\rangle_{1,3}|1\rangle_2 - \beta|1,1\rangle_{1,3}|0\rangle_2)$$

Asimismo, este estado puede reescribirse en términos de los estados de Bell del par de partículas (1, 3) usando identidades como $|0,0\rangle = (|\Phi_+\rangle + |\Phi_-\rangle)/\sqrt{2}$, $|1,1\rangle = (|\Phi_+\rangle - |\Phi_-\rangle)/\sqrt{2}$, $|0,1\rangle = (|\Psi_+\rangle + |\Psi_-\rangle)/\sqrt{2}$, $|1,0\rangle = (|\Psi_+\rangle - |\Psi_-\rangle)/\sqrt{2}$. Introduciendo esto en la expresión anterior obtenemos que

$$|\Psi_{1,2,3}\rangle = \frac{1}{2}(|\Phi_+\rangle_{1,3} \otimes (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)_2 + |\Phi_-\rangle_{1,3} \otimes (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)_2 + |\Psi_+\rangle_{1,3} \otimes (-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_2 + |\Psi_-\rangle_{1,3} \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_2)$$

Hasta aquí no hemos hecho otra cosa mas que escribir el estado inicial de una manera especial. Sin embargo, esta última fórmula sugiere el procedimiento a seguir: Si realizamos una medición de los observables M_1 y M_2 sobre el par de partículas (1, 3), que se encuentran en el laboratorio A , obtendremos cuatro resultados posibles (ya que $m_1 = \pm 1$ y $m_2 = \pm 1$) cada uno de los cuales identifica a un estado de Bell (para $|\Phi_+\rangle$, $m_1 = 1$ y $m_2 = 1$, para $|\Phi_-\rangle$ $m_1 = -1$ y $m_2 = 1$, para $|\Psi_+\rangle$ $m_1 = -1$ y $m_2 = 1$ y para $|\Psi_-\rangle$ $m_1 = -1$ y $m_2 = -1$). Para cada uno de estos resultados, el estado de la partícula 3 queda proyectado en un estado diferente. Pero en todos los casos, podemos aplicar una operación unitaria sobre esa partícula que depende de los resultados obtenidos (m_1 y m_2) y que es tal que el estado final siempre será el mismo que el estado inicial de la partícula 1. Los operadores a aplicar son

$$U_{1,1} = \sigma_y, \quad U_{1,-1} = \sigma_z \\ U_{-1,1} = \sigma_x, \quad U_{-1,-1} = \mathbb{1}$$

En cualquier caso, el estado final de la partícula 3 es $|\phi_3\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

Esta secuencia de operaciones está descrita en la figura que aparece mas abajo. En ella el qubit a teleportar es el primero. La primera secuencia de Hadamard-CNOT aplicados sobre los spines 1 y 2 prepara un estado de Bell (en el caso de la figura si el estado inicial de los qubits (1, 2) es $|1,1\rangle$ entonces el estado preparado es $|\Psi_-\rangle$).

El qubit a teleportar en la figura está denominado q_0 (y no 3 como en el argumento presentado mas arriba). La siguiente secuencia mide en la base de Bell del subespacio formado por las partículas 0 y 1, que se supone que están en el mismo laboratorio. El resultado de la medición de M_1 se lee observando el estado final del qubit q_0 y el estado de la medición de M_2 queda registrado en el estado final de q_1 . Por último se aplican los operadores correspondientes que están condicionados por el resultado de la medición: Cuando el primer qubit es $|e\rangle$ se aplica el operador σ_z y cuando el segundo qubit es $|e\rangle$ se aplica el operador σ_x .

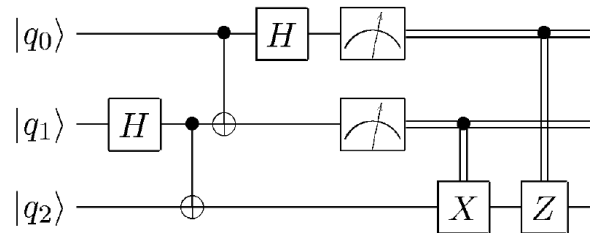


FIG. 6 El dispositivo propuesto para teleportar el estado de un átomo de una cavidad a otra.

D. Una propuesta concreta: teleportación de un átomo entre dos cavidades

Veremos aquí como se podría realizar la teleportación de un átomo entre dos regiones distantes del espacio. En esta propuesta se usarán dos cavidades como intermediarias. El esquema experimental está descrito en la figura que aparece mas abajo.

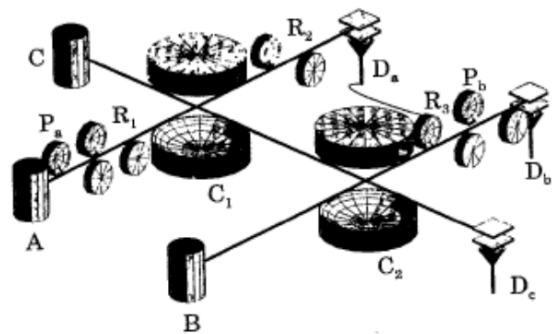


FIG. 7 El dispositivo propuesto para teleportar el estado de un átomo de una cavidad a otra.

El procedimiento puede describirse mediante la siguiente secuencia de operaciones.

1. Se genera primero un estado entrelazado del campo electromagnético entre las dos cavidades. El método fue descrito en las clases anteriores y usa como mediador a un átomo que atraviesa ambas

cavidades. Inicialmente las cavidades están vacías y el átomo es preparado en el estado $|e\rangle$. En la primera cavidad interactúa con el campo mediante un pulso $\pi/2$ y en la segunda mediante un pulso 3π . Luego de estas operaciones el estado del campo en las cavidades es

$$|\psi_{C_1, C_2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 1\rangle - |1, 0\rangle)$$

- El átomo a teleportar ingresa en la cavidad C_1 en un estado desconocido $|\phi_A\rangle = \alpha|e\rangle + \beta|g\rangle$. Antes y después de atravesar la cavidad, el átomo atraviesa sendas zonas de Ramsey en las cuales se implementa una serie de pulsos tales que el operador de evolución es U_H . El átomo en la cavidad interactúa en forma no resonante (con alta desintonía a de modo tal que el tiempo de interacción es tal que se produce un desfase en π entre los estados $|e, 1\rangle$ y $|g, 1\rangle$). Esto sucede cuando $\frac{\gamma^2}{\Delta}t = \frac{\pi}{2}$. En síntesis, el operador de evolución del sistema átomo-campo que resulta de la interacción es $U_{CZ'} = \text{diag}(1, 1, i, -i)$. El operador combinado obtenido por la composición de las operaciones de las zonas de Ramsey y la interacción en la cavidad es U_{RCR} que se obtiene como

$$U_{RCR} = U_H \otimes \mathbb{1} \times U_{CZ'} \times U_H \otimes \mathbb{1}$$

Es fácil ver que la acción de este operador es, secuencialmente, la siguiente:

$$\begin{aligned} |e, 0\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle + |g, 0\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle + |g, 0\rangle) \\ &\rightarrow |e, 0\rangle \\ |g, 0\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle - |g, 0\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle - |g, 0\rangle) \\ &\rightarrow |g, 0\rangle \\ |e, 1\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 1\rangle + |g, 1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(i|e, 1\rangle - i|g, 1\rangle) \\ &\rightarrow i|g, 1\rangle \\ |g, 1\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle - |g, 0\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(i|e, 0\rangle + i|g, 0\rangle) \\ &\rightarrow i|e, 1\rangle \end{aligned}$$

En consecuencia, esta secuencia de operaciones es una operación $U_{CN'}$ en la cual el campo actúa como control y el átomo como blanco. Podemos ver que esta secuencia de operaciones es el primer ingrediente necesario para hacer una medición en la base de Bell del sistema formado por el átomo y el campo en la primera cavidad. En efecto, podemos ver que

$$\begin{aligned} U_{RCR} \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle \pm |g, 1\rangle) &= |e\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm i|1\rangle) \\ U_{RCR} \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 1\rangle \pm |g, 0\rangle) &= |g\rangle \otimes \frac{(\pm 1)}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm i|1\rangle) \end{aligned}$$

En consecuencia, el estado final del átomo revela si el estado pertenece a los estados tipo $|\Phi_{\pm}\rangle$ o $|\Psi_{\pm}\rangle$. O sea, el estado final del átomo es $|e\rangle$ siempre y cuando el estado inicial es alguno de los estados $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle \pm |g, 1\rangle)$. Por el contrario, el estado final del átomo es $|g\rangle$ si el estado inicial es $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 1\rangle \pm |g, 0\rangle)$.

En definitiva, la medición del estado final del átomo revela el autovalor del operador $M_2 = \sigma_z \otimes \sigma_z$. La información sobre el valor de $M_1 = \sigma_x \otimes \sigma_x$ queda almacenado en la cavidad ya que el estado del campo en su interior es siempre $|\phi_C\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm i|1\rangle)$.

- Para detectar el autovalor de M_1 debemos medir el estado del campo dentro de la cavidad. Para ese fin usamos otro átomo preparado en el estado $|g\rangle$. El átomo atraviesa la cavidad e interactúa con el campo mediante un pulso π . Tal como describimos en el capítulo anterior el efecto de esta interacción es transferir el estado del campo en la cavidad al estado del átomo. Luego de la interacción la cavidad queda en el estado de vacío $|0\rangle$ y el estado del átomo es $|\phi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle \pm i|g\rangle)$. Si este átomo ingresa a una zona de Ramsey que induce una rotación alrededor del eje \vec{e}_y que transforma los estados $|e\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + i|g\rangle)$ y $|g\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + i|e\rangle)$. En ese caso el estado final del átomo será $|e\rangle$ ó $|g\rangle$ según el signo de la superposición sea ± 1 .

Esto completa el proceso de medición en la base de Bell. El procedimiento revela el valor de M_1 y M_2 para el sistema formado por el átomo a teleportar y el fotón en la primera cavidad.

- El proceso de teleportación se completa enviando otro átomo preparado en el estado $|g\rangle$ que interactúa con la segunda cavidad mediante un pulso π . Esto simplemente logra que el estado de la cavidad sea transferido a ese átomo. Finalmente, en una zona de Ramsey se puede realizar la operación unitaria requerida (ver arriba) U_{m_1, m_2} para lograr que el estado final de ese átomo sea idéntico al estado inicial del átomo a teleportar (que nunca pasó ni estuvo cerca de la cavidad C_2). Esto completa el proceso de teleportación.

El experimento descrito fue propuesto en esta forma (a menos de pequeñas variantes por Davidovich, Zagury, Brune, Raymond y Haroche (Phys Rev A 50, R895 (1994)) pero todavía no ha sido implementado en la práctica (aunque se espera que en el próximo lustro sea posible realizar experimentos con dos cavidades).

IV. CLASE 14: ALTERNATIVAS A LA MECÁNICA CUÁNTICA. EL ORIGEN DEL AZAR.

En este capítulo intentaremos resumir los intentos más importantes por buscar argumentos que permitan generar una descripción del mundo basada en principios "obvios" que son contradichos por la mecánica cuántica. Por ejemplo, hemos dicho varias veces que la mecánica cuántica afirma que las probabilidades no provienen de nuestra ignorancia. Eso es evidentemente cierto: en el formalismo de la mecánica cuántica no hay nada que diga que ese, la ignorancia, es el origen del azar. Pero: ¿Cómo podemos estar seguros de que no hay descripciones alternativas que den lugar a las mismas predicciones cuantitativas que aquellas que realiza la mecánica cuántica? Tal vez, si eso fuera posible, exista otra descripción más profunda de la naturaleza en la que el azar surja como consecuencia de nuestra ignorancia y no como algo inexplicable. Algo a cuya existencia debemos resignarnos.

Presentaremos la demostración de que las predicciones de la mecánica cuántica son cuantitativamente contrapuestas a aquellas que surgen de una gran clase de modelos que aceptan hipótesis compatibles con nuestro sentido común. Estos modelos se conocen con el nombre de modelos "realistas y locales", un nombre con una carga filosófica tal vez demasiado pesada. Describiremos en detalle las hipótesis en las que se basan esos modelos y presentaremos las predicciones que dan lugar a contradicciones experimentalmente verificables con la mecánica cuántica.

A. Un poco de historia...

Una de las figuras icónicas de la lucha en contra de la mecánica cuántica fue, paradójicamente, uno de sus creadores: Albert Einstein. Sin duda, Einstein fue uno de los más grandes científicos de la historia. Sus ideas revolucionaron el pensamiento humano mostrando que, por ejemplo, conceptos tan básicos como el tamaño de los objetos y la duración de los intervalos de tiempo no tienen un carácter absoluto. Por el contrario, dependen del observador. La Teoría de la Relatividad nos obligó a repensar conceptos básicos que están anclados en nuestro sentido común, ese conjunto de ideas que consideramos como obvias y que se forjan en nuestras experiencias cotidianas. Hoy, a más de cien años del nacimiento de la Relatividad hay miles de científicos que la comprenden y aplican a la perfección. Mas aún, a lo largo de estos cien años ha sido posible reconciliar algunas de sus ideas más extrañas con nuestro sentido común. Para ello muchas veces solemos apelar a metáforas: La vida en un espacio curvo puede imaginarse pensando en lo que le ocurriría a un ser plano condenado a existir sobre la superficie de una esfera; la materia curva el espacio-tiempo de manera análoga a como una cama elástica se deforma al apoyar sobre ella un objeto masivo, etc. Estas analogías tienen

sus defectos y no siempre resultan precisas, pero al menos es posible imaginarlas.¹

La teoría de la relatividad se desarrolló en sus comienzos como una empresa familiar: Einstein la concibió trabajando en soledad. Es bien conocida la anécdota que cuenta que cerca de 1920 Sir Arthur Eddington fue reportado por un periodista que le mencionó el rumor que por ese entonces afirmaba que en el mundo solamente había tres personas que comprendían la teoría de la relatividad. Eddington (bromeando?) preguntó: "¿Y quién es el tercero?" Por esos años había otra rama de la física en pleno desarrollo: la física cuántica. Contrariamente a lo que sucedía con la relatividad, eran decenas los físicos que trabajaban activamente en su desarrollo. La mecánica cuántica fue una creación colectiva que surgió luego de un esfuerzo material e intelectual impresionante. En este artículo nos referiremos a ese capítulo de la física, a la física cuántica. Y en particular nos referiremos a los cuestionamientos de Albert Einstein hacia la mecánica cuántica.

Einstein, con su trabajo sobre el efecto fotoeléctrico, contribuyó sustancialmente al desarrollo de la mecánica cuántica. Sin embargo jamás fue capaz de aceptar sus consecuencias y siempre la aborreció. Para citar solamente alguna de sus opiniones escritas basta mencionar las siguientes: En 1912 en una carta a Heinrich Zangger afirmaba, de manera algo irreverente: "*Cuanto más éxitos logra, más tonta me parece*". Mas adelante, en 1930 en una carta dirigida a Max Born decía: "*Todavía no me resigno a creer que los métodos estadísticos de la mecánica cuántica sean la última palabra, pero por el momento soy el único que sostiene esa opinión*". En otra carta dirigida a Max Born, Einstein acuñó, en 1944, su famosa frase: "*Usted cree que Dios juega a los dados, mientras que yo creo en la existencia de leyes y de orden en un mundo al que, de una manera brutalmente especulativa, estoy tratando de comprender*". En 1950, hacia el final de su vida y en una época de gloria de la física cuántica, Einstein se atrevió a afirmar que "*...a pesar de sus notables avances parciales, el problema está lejos de tener una solución satisfactoria*".

¿Qué era lo que más le molestaba a Einstein de la física cuántica? La respuesta es sencilla: Su insatisfacción se originaba en el indeterminismo. La mecánica cuántica es una teoría no-determinista. Afirma que es posible realizar muchas veces el mismo experimento y obtener siempre resultados diferentes. Para colmo de males, la mecánica cuántica afirma que el indeterminismo es de naturaleza fundamental y que no se origina en ninguna limitación de nuestro instrumental. Es decir, de acuerdo a ella, la razón por la cual al repetir un experimento

¹ La influencia de Einstein en el pensamiento científico moderno se pone en evidencia mencionando algunas frases llamativas que no tendrían sentido sin su contribución: "el tiempo se dilata", "las longitudes se contraen", "vivimos en un espacio-tiempo curvo", "la luz modifica su trayectoria al pasar cerca del sol", etc.

obtenemos resultados diferentes no es la falta de precisión en los artefactos que utilizamos para preparar el objeto antes de efectuar la medición, ni tampoco la falta de control en los aparatos de medición. Por último, y esto resultaba intolerable para Einstein, la mecánica cuántica afirma que el indeterminismo tampoco puede atribuirse a nuestra ignorancia sobre los detalles del objeto estudiado. Einstein hubiera aceptado de buena gana una teoría que, con modestia, se limitara a predecir probabilidades. En cambio, le resultaba intolerable la mecánica cuántica que de manera contundente, afirma que las probabilidades no surgen de nuestra ignorancia ni de nuestra incapacidad de controlar todas las variables experimentales sino que tienen un origen fundamental e inexplicable.

Estas características de la física cuántica no solamente molestaban a Einstein, sino que todavía molestan a casi todos los físicos cuánticos, que se cuentan por decenas de miles. Paradójicamente, siendo la física cuántica la teoría científica mejor testada de la historia, todavía no se han acallado los debates sobre su interpretación. Estos debates comenzaron desde la concepción de la teoría y Einstein tuvo un notable protagonismo en muchos de ellos. Las predicciones de la física cuántica son múltiples y sumamente precisas. Por ejemplo, puede predecir que cada vez que iluminemos un átomo de Helio se emitirá un electrón siempre que la longitud de onda de la luz sea menor que 50.425931 ± 0.000002 nanómetros. Por otra parte, esta predicción teórica es contrastada con el resultado de los experimentos donde se comprueba que los electrones son emitidos para longitudes de onda menores que 50.4259299 ± 0.0000004 nanómetros. El acuerdo entre la teoría y el experimento es notable: una precisión comparable a la que tendríamos si fuéramos capaces de predecir la distancia entre Ushuaia y La Quiaca con un error menor que diez centímetros! ² Predecir propiedades de los átomos con precisión asombrosa puede ser impresionante pero alejado de la vida cotidiana. Sin embargo, a partir de este tipo de logros es que la física cuántica ha permitido el desarrollo de tecnologías que cambiaron el mundo y nuestra forma de vida: Sin ella no se hubiera desarrollado la energía nuclear, ni la microelectrónica, ni el laser, ni ninguna de las tecnologías optoelectrónicas que revolucionaron las comunicaciones, ni las técnicas modernas de diagnóstico médico por imágenes, etc. Casi todas las tecnologías relevantes del siglo XX se basan en la mecánica cuántica!

Sin embargo, pese a sus asombrosas predicciones ninguno de las decenas de miles de científicos cuánticos es capaz de “comprender” esta teoría. No es capaz de tornarla compatible con el sentido común. Richard Feynman, uno de los científicos más brillantes de la segunda mitad del siglo XX afirmaba, en forma provocadora, que

“nadie entiende la mecánica cuántica”. Y lo hacía en el contexto de una reflexión profunda: Para Feynman, nadie es capaz de hacerse una imagen correcta del mundo microscópico usando los conceptos que generamos para describir el mundo macroscópico. Al hacer eso, caemos inevitablemente en preguntarnos: Cómo es posible que la naturaleza se comporte de este modo? Nadie lo entiende. Pero los hechos confirman que la naturaleza se comporta tal como lo predice la mecánica cuántica.

B. Einstein contra la mecánica cuántica. EPR

En 1935 Einstein Podolsky y Rosen (EPR) publicaron en el *Physical Review* un artículo con un título provocativo en el que preguntaban: “Puede considerarse que la descripción cuántica de la realidad física es completa?”. En el trabajo argumentaban que la respuesta a esta pregunta es negativa: Einstein creía haber encontrado un argumento que permitía demostrar que en la mecánica cuántica anidaba el germen de su propia destrucción. El trabajo de EPR tuvo inmediata repercusión en los medios (apareció en la primera plana del diario New York Times) pero fue rápidamente contestado por Bohr, que mostró que EPR no estaban poniendo en evidencia una contradicción en la teoría sino simplemente su rareza, su naturaleza contraria al sentido común. La profecía de Einstein, como veremos, su profecía demostró ser incorrecta (hoy sabemos con certeza que si el germen que destruirá a la mecánica cuántica existe, no es aquel encontrado por Einstein en 1935).

El trabajo de EPR forma parte de un debate que dio lugar a muchos trabajos: Es posible construir teorías alternativas a la mecánica cuántica en las que el origen del azar sea nuestra ignorancia? Einstein creyó que en 1935 había demostrado que la propia mecánica cuántica reclamaba esas teorías, que era evidente que no proveía una descripción completa de la naturaleza. Veamos su argumento:

En su célebre trabajo EPR establecen en primer lugar una serie de requisitos que toda teoría que aspire a describir la realidad física debe cumplir. De acuerdo a los autores, las teorías físicas tienen que tener a los “elementos de la realidad” como sus principales protagonistas. EPR proveen una definición operacional para distinguir aquellas propiedades de la naturaleza que deben ser considerados “elementos de la realidad”. Esta definición es la siguiente: *Si somos capaces de predecir con certeza el valor de alguna propiedad de un objeto sin perturbarlo en modo alguno, entonces esa propiedad debe ser considerada un “elemento de la realidad”*. La idea es simple: si nuestra predicción no afecta en modo alguno al sistema, la propiedad en cuestión tiene que tener un sustituto real, su valor debe de estar “escrito” en el objeto en cuestión. Estos criterios propuestos por EPR para toda teoría física pueden ser discutidos en el plano epistemológico o filosófico, pero suenan aceptables para la mayoría de las personas. El objetivo del trabajo de EPR

² Por el contrario, la física “clásica” predice que para cualquier longitud de onda algunos electrones serán emitidos por los átomos de Helio, lo cual entra en abierta contradicción con los resultados de los experimentos.

es demostrar que la mecánica cuántica no cumple con estos principios y que, por lo tanto, no puede ser considerada una descripción completa de la realidad física.

La clave del trabajo de EPR consiste en analizar las propiedades de los estados entrelazados. El nudo del argumento EPR (en la versión desarrollada más tarde por David Bohm) es el siguiente: Consideremos un sistema compuesto por dos partículas de espín $1/2$ que es preparado de modo tal que sus propiedades $M_1 = \sigma_x \otimes \sigma_x$ y $M_2 = \sigma_z \otimes \sigma_z$ toman los valores $M_1 = -1$ y $M_2 = -1$ (o sea, el estado es el estado de Bell $|\Psi_-\rangle$). Consideremos además que las partículas 1 y 2 pueden ser separadas y llevadas a laboratorios distantes que llamaremos Labo-1 y Labo-2. Utilizaremos laboratorios tan separados como para que ninguna perturbación material generada durante las mediciones realizadas en el Labo-1 tenga tiempo suficiente para propagarse hasta el Labo-2 (y viceversa). Tal como discutimos más arriba, si en el Labo-1 medimos la propiedad σ_x sobre la primera partícula podemos predecir el resultado que obtendríamos si midiéramos σ_x en el Labo-2. En efecto, sabemos que si obtenemos $\sigma_{x,1} = +1$ entonces con certeza podemos predecir que si midiéramos $\sigma_{x,2}$ deberíamos obtener el resultado $\sigma_{x,2} = -1$. Análogamente, si obtenemos $\sigma_{x,1} = -1$ entonces predecimos con certeza que si decidiéramos medir $\sigma_{x,2}$ obtendremos el valor $\sigma_{x,2} = +1$. Por lo tanto el valor de la propiedad $\sigma_{x,2}$ siempre puede ser predicha con certeza a partir de los resultados de experiencias realizadas en el Labo-1, que es un laboratorio tan distante que ninguno de los eventos que ocurren en su interior puede alterar el estado de cosas para la partícula 2.

En consecuencia, estamos obligados a concluir que $\sigma_{x,2}$ debe ser un “elemento de la realidad”. Lo mismo debe pasar con $\sigma_{z,2}$ ya que podríamos predecir con certeza su valor a partir de experimentos del mismo tipo, que involucran medir la propiedad $\sigma_{z,1}$ sobre la primera partícula. La conclusión a la que nos conduce este razonamiento es que tanto $\sigma_{x,2}$ como $\sigma_{z,2}$ son “elementos de la realidad” y por lo tanto tienen que tener un lugar dentro de una teoría física completa. Sin embargo, para la mecánica cuántica estas propiedades son complementarias y sus valores no pueden ser definidos simultáneamente. En consecuencia, concluyen EPR: la mecánica cuántica no puede proveer una descripción completa de la realidad física.

El trabajo de EPR recibió una rápida (y breve) respuesta de Niels Bohr quien hizo notar que el argumento de EPR no expone en realidad ninguna contradicción interna de la mecánica cuántica. Por otra parte Bohr destacó que el argumento de EPR utiliza un razonamiento “contra-fáctico” ya que mezcla resultados de experimentos reales con resultados de experimentos imaginarios. En efecto: en el primer laboratorio tenemos que decidir que propiedad mediremos para la partícula 1. Podríamos elegir medir $\sigma_{x,1}$ o bien podríamos elegir medir $\sigma_{z,1}$. Pero no podemos hacer las dos cosas a la vez. El argumento EPR mezcla sutilmente los resultados de ambas mediciones ya que en definitiva ambas

son necesarias si pretendemos otorgar el status de “elementos de realidad” tanto a la propiedad $\sigma_{x,2}$ como a $\sigma_{z,2}$. Efectivamente, aquí hay un razonamiento contra-fáctico. Pero es un razonamiento que cualquier persona sensata estaría dispuesta a hacer: Si la partícula 2 se encuentra en el Labo-2, nada puede saber sobre cuál es la propiedad que el experimentador decidirá medir en el Labo-1. En consecuencia, deberíamos estar dispuestos a aceptar que, pese a que no podemos realizar los dos experimentos sino que debemos elegir uno de ellos, tanto las propiedades $\sigma_{x,2}$ como $\sigma_{z,2}$ deben estar escritas en la segunda partícula (o sea, deben ser “elementos de la realidad”). En cambio, la mecánica cuántica no nos permite razonar de esta forma. Asher Peres acuñó la frase que mencionamos varias veces y que describe la actitud que debería tener un físico pragmático ante la posibilidad de caer en razonamientos contra-fácticos. No debería olvidar nunca que *los experimentos que no se realizan no tienen resultados*.

C. Teorías realistas locales. Variables ocultas.

Queda claro que el argumento de EPR no demuestra una inconsistencia interna de la mecánica cuántica sino que pone en evidencia que esta teoría no satisface ciertos criterios de muy razonable apariencia. Naturalmente debemos preguntarnos si es posible que exista una alternativa compatible con los resultados de los experimentos (que hasta el día de hoy coinciden con las predicciones de la mecánica cuántica) y que además sea compatible con el sentido común, o, más precisamente, con los postulados de EPR. Una teoría de estas características fue mencionada más arriba. Podríamos imaginar que existen en la naturaleza grados de libertad microscópicos que todavía no hemos sido capaces de descubrir. Estos grados de libertad son usualmente denominados “variables ocultas”. Si existieran variables ocultas, podríamos concebir la posibilidad de que nuestra ignorancia sobre su comportamiento y su naturaleza es la responsable de la aleatoriedad que observamos en los resultados de ciertos experimentos. Es decir, podríamos concebir la posibilidad de que al repetir muchas veces el mismo experimento sin controlar el comportamiento de las variables ocultas estuviéramos generando sistemas que en realidad no son idénticos entre sí. En cada realización experimental, en cada evento, los resultados de los experimentos estarían completamente determinados por los valores ocultos. Pero al repetir muchas veces el mismo experimento podríamos obtener resultado distintos distribuidos de manera aparentemente aleatoria. Esta aleatoriedad sería simplemente una consecuencia de nuestra ignorancia.

El trabajo de EPR tuvo la virtud de exponer de manera sistemática cuales son las propiedades que nuestro sentido común le reclama a las teorías físicas. Las teorías compatibles con el sentido común son aquellas que se engloban con el nombre de *teorías realistas locales*. Diremos

que una teoría es “realista” (una palabra que tal vez tiene connotaciones demasiado fuertes como para ser utilizada aquí) si acepta el hecho de que todas las propiedades observables (los elementos de realidad) de los sistemas físicos tienen valores precisos que en última instancia determinan los resultados de las mediciones que efectuemos sobre ellas. Estas teorías incluyen a las que aceptan la existencia de variables ocultas. De acuerdo a ellas la realidad física se describe en su nivel mas profundo mediante un modelo en el que los resultados de todos los posibles experimentos están escritos de algún modo en los objetos. Es decir, en este contexto el realismo es sinónimo de determinismo. Toda aleatoriedad debe originarse en nuestra limitada capacidad de control o de conocimiento. Diremos que una teoría es “local” si no admite la posibilidad de que exista acción a distancia o propagación instantánea de cualquier tipo de señal o perturbación. En estas teorías, separando suficientemente dos partes de un sistema (llevandolas a laboratorios muy distantes) garantizamos que las acciones que realicemos en un laboratorio no tendrán ninguna influencia sobre lo que suceda en el otro laboratorio.

D. Cómo sabemos si no existen teorías de variables ocultas cuyas predicciones coincidan con las de la mecánica cuántica?

La posibilidad de que exista alguna teoría mas fundamental que la mecánica cuántica basada en variables ocultas fue considerada por numerosos autores. La discusión sobre este asunto se aplacó luego de que John von Neumann publicara un teorema en el que se demostraba que no era posible construir una teoría de este tipo que diera lugar a las mismas predicciones que la mecánica cuántica. Su teorema fue publicado en el célebre libro en el que el genial von Neumann presenta su axiomatización de la mecánica cuántica. Sin embargo a principios de los años 60, John Bell puntualizó que el teorema de von Neumann contenía un error, una hipótesis demasiado restrictiva que hacía que sus consecuencias no fueran trascendentes. El propio Bell, comenzó a explorar entonces la posibilidad de construir teorías de variables ocultas dando lugar a una serie de trabajos de consecuencias notables.

Bell intentaba demostrar que Einstein tenía razón y que no podía descartarse la existencia de teorías mas fundamentales que la mecánica cuántica en las que el azar se originara en la ignorancia. Esa era su opinión, el prejuicio ideológico con el que comenzó sus trabajos. Y para comenzar, Bell construyó un ejemplo sencillo: Demostró que es posible construir una teoría de variables ocultas que prediga los mismos resultados que la mecánica cuántica para un sistema formado por una única partícula de spin 1/2. De este modo Bell no solamente demostraba que la conclusión de von Neumann era incorrecta sino que, pensaba, abría el camino para el estudio de este tipo de teorías que, tal vez, algún día

podrían reemplazar a la mecánica cuántica. Pero el final de la historia fue muy diferente a como lo imaginaba John Bell. Demostró exactamente lo opuesto a lo que pretendía...

Es muy ilustrativo recorrer la historia de los trabajos de Bell. En su primer trabajo célebre sobre el tema (publicado en 1966) Bell presenta una teoría de variables ocultas para una partícula de spin 1/2. La teoría da lugar exactamente a las mismas predicciones que la mecánica cuántica (una gran virtud). En esta teoría Bell admite que el estado de un sistema debe describirse de manera mas completa que como lo hace la mecánica cuántica. En efecto, admite que a la descripción del estado que hace la mecánica cuántica mediante un vector $|\psi\rangle$ podría agregarse un conjunto de variables desconocidas, a las que genéricamente denotamos como λ . La gran virtud de esta teoría es que admite que conociendo $|\psi\rangle$ y λ podríamos predecir con certeza los resultados de todas las mediciones sobre el espín. Nuestra ignorancia sobre λ es la responsable del lamentable hecho de que nos veamos obligados a predecir solamente probabilidades.

Por supuesto que esta teoría de Bell no tiene ningún sentido físico sino que está destinada a demostrar que no podemos descartar la existencia de modelos en los que el azar proviene de la ignorancia. El modelo es suficientemente sencillo como para describirlo sintéticamente. Como dijimos, el estado del sistema está descrito por el par $(|\psi\rangle, \lambda)$, donde la variable oculta λ es un número real tal que $-1 \leq \lambda \leq 1$. Supongamos que aceptamos la siguiente regla para predecir el resultado que se obtiene en la medición de alguna propiedad observable (que está representada por el operador $\hat{A} = \vec{n} \cdot \sigma$ (cuyos valores son siempre iguales a ± 1 , lo cual es un dato experimental):

1. a Si $-1 \leq \lambda \leq \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ entonces $A(|\psi\rangle, \lambda) = +1$
2. b Si $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle < \lambda \leq 1$ entonces $A(|\psi\rangle, \lambda) = -1$.

Si admitimos que λ es una variable con una distribución uniforme (o sea, en cada realización del experimento se sortea un valor de λ al azar elegido en todo el intervalo) entonces el valor medio de los resultados es

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \int d\lambda p(\lambda) A(|\psi\rangle, \lambda) \\ \langle \hat{A} \rangle &= \frac{1}{2}((-1)(1 - \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle) + (+1)(\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle + 1)) \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \end{aligned}$$

En consecuencia, el valor medio de cualquier observable obtenido promediando los valores obtenidos para cada λ (y para cada $|\psi\rangle$) es idéntico al predicho por la mecánica cuántica. Una teoría como esta es indistinguible de la mecánica cuántica en cuanto a sus predicciones pero está basada en una imagen del mundo mucho mas compatible con nuestro sentido común. Vale la pena comentar una propiedad del modelo de Bell, que está relacionada con aspectos fundamentales del espín que discutimos en la primera clase. Consideremos las tres

propiedades $\hat{A}_i = \vec{n}_i \cdot \sigma$ donde los versores \vec{n}_i ($i = 1, 2, 3$) forman ángulos de 120 grados entre si. El modelo de Bell le asigna valores a estas tres propiedades de acuerdo al esquema presentado mas arriba. Es decir, para un dado valor de λ y para un dado estado $|\psi\rangle$ los valores $A_i(|\psi\rangle, \lambda)$ están determinados. Sin embargo, estos valores no satisfacen la relación de consistencia funcional $\sum A_i = 0$. Esta relación se cumple para los valores medios pero no para los valores individuales.

Luego de formular este modelo, Bell analizó la pregunta obvia: Será posible construir modelos de este tipo para cualquier sistema cuántico? En ese mismo trabajo Bell dió el primer paso en esa dirección analizando un sistema de dos partículas de espín 1/2. Nuevamente fue capaz de construir una teoría de variables ocultas cuyas predicciones coincidían con la mecánica cuántica. Sin embargo, el modelo de Bell para dos espines era no local: Para estados entrelazados se verificaba que las variables ocultas que determinan los valores de las propiedades de cada subsistema son globales y no pueden separarse en variables que afecten localmente a cada parte. Bell se pregunta en su trabajo si esta propiedad era simplemente un defecto de su modelo o si, por el contrario sería una propiedad general de cualquier modelo de variables ocultas cuyas predicciones coincidieran con las de la mecánica cuántica. En una nota al pie de página, que fue incluido en las pruebas de galera del trabajo, figura una aclaración: "Desde la escritura de este trabajo, he encontrado una prueba de que esta es una propiedad general". Esa prueba fue publicada en otro trabajo, escrito con posterioridad al anterior pero publicado, por un problema editorial, antes. Es decir, el primer trabajo de Bell fue publicado en 1966 mientras que el primero lo fue en 1964. En este trabajo figura la demostración mencionada, junto con notables reflexiones sobre sus implicancias.

En efecto, Bell demuestra que cualquier teoría que acepte la existencia de variables ocultas que determinan los valores de todas las propiedades de un sistema (realismo) y al mismo tiempo aceptan el principio de localidad, conducen a predicciones cuantitativamente diferentes que la mecánica cuántica.

E. Desigualdades de Bell: Mecánica cuántica contra teorías realistas-locales

Los trabajos de John Bell permitieron que la discusión sobre la existencia de teorías de variables ocultas pasara del terreno de la filosofía al de la física, en el cual la validez de los modelos es sometidos al juicio de los experimentos. Es interesante notar que la intención de John Bell al comenzar sus investigaciones era encontrar argumentos a favor del punto de vista de Einstein. Bell expuso su posición ideológica con elocuencia: "*Yo pensaba que la superioridad intelectual de Einstein sobre Bohr en este punto era enorme: una distancia gigante entre un hombre que veía claramente lo que se necesitaba (Einstein) y un oscurantista (Bohr)*". Paradojalmente, con

sus trabajos Bell logró exactamente lo contrario de lo que se proponía: descubrió la forma en la cual el punto de vista de Einstein podía demostrarse falso a partir de los resultados de experimentos reales.

La trascendencia de los trabajos de Bell no puede subestimarse. Los mismos han tenido un impacto enorme en las últimas décadas. En breves palabras, Bell demostró que todas las teorías realistas locales conducen a predicciones cuantitativas sobre resultados experimentales concretos. Asimismo, demostró que estas predicciones pueden entrar en contradicción con las de la mecánica cuántica. En consecuencia, la validez de uno u otro modelo (el cuántico o aquel basado en nuestro sentido común) puede ser sometida al juicio de la ciencia experimental.

A primera vista resulta sorprendente que sea posible derivar predicciones para todas las teorías realistas locales. Estas predicciones toman la forma de desigualdades matemáticas que restringen los valores que pueden tomar las probabilidades de eventos registrados en laboratorios distantes cuando se realizan experimentos sobre las partes de un sistema compuesto. Estas relaciones matemáticas se conocen con el nombre de "desigualdades de Bell". En lo que sigue presentaremos una deducción sencilla de una de estas desigualdades (que no fue presentada por Bell sino por David Mermin en 1981).

F. Descripción de un experimento sencillo realizado en dos laboratorios.

Consideremos ahora una situación como la analizada en el trabajo de EPR (en la versión desarrollada por David Bohm): Tomamos un sistema compuesto por dos partículas de espín 1/2. Determinamos simultáneamente los valores de las propiedades $M_1 = -1$ y $M_2 = -1$, creando de este modo un estado entrelazado cuyas propiedades discutimos mas arriba. Luego llevamos a cada partícula a un laboratorio distinto (Labo-1 y Labo-2). Ambos laboratorios están espacialmente separados y la distancia entre ellos es tal que no hay posibilidad de propagación de ninguna señal de un laboratorio a otro durante el tiempo en que transcurren nuestros experimentos. En cada laboratorio un experimentador medirá la componente del espín de su partícula a lo largo de alguna de las tres direcciones que indicamos como \hat{a}, \hat{b} o \hat{c} en la Figura 3 (las tres direcciones forman un ángulo de 120 grados entre si). Los experimentadores que actúan en cada uno de sus laboratorios eligen al azar en cual de las tres direcciones miden el espín. Podemos pensar que cada experimentador tiene a su disposición un aparato como el que aparece en la Figura 3. Dicho aparato tiene un selector con tres posiciones. Cuando el selector apunta hacia la izquierda el aparato mide la componente \hat{a} del espín, si el selector apunta hacia arriba el aparato mide la componente \hat{b} y si apunta hacia la derecha mide la componente \hat{c} . Cualquiera de esas mediciones da lugar solamente a dos resultados: +1 o -1. El experimento

se repite muchas veces y en cada repetición el sistema se prepara de manera idéntica, ambas partículas se separan y cada experimentador elige al azar (y de manera totalmente independiente) la posición del selector de su aparato y registra el valor que obtiene en su medición.

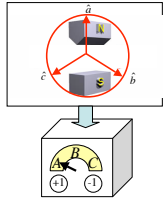


FIG. 8 Para poner a prueba la versión mas sencilla de las desigualdades de Bell es necesario un aparato que mide el valor de la componente \hat{a} , \hat{b} o \hat{c} de una partícula de espín $1/2$.

Como cada experimentador puede elegir medir una de tres propiedades (A , B , ó C) las mediciones realizadas en los dos laboratorios se pueden agrupar en nueve configuraciones. Sin mucho esfuerzo podemos hacer una lista de todas ellas. Colocando en primer lugar la propiedad medida en el Labo-1 y en segundo lugar la que se mide en el Labo-2, las nueve configuraciones son: $A_1 - A_2$, $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$, $A_1 - B_2$, $B_1 - A_2$, $A_1 - C_2$, $C_1 - A_2$, $B_1 - C_2$ y $C_1 - B_2$.

Qué tipo de resultado podríamos obtener en un experimento de este tipo? Por ahora solamente vamos a aceptar un hecho, que surge de los experimentos. Cada vez que en ambos laboratorios medimos la misma propiedad, obtenemos resultados opuestos. Es decir, los resultados de los experimentos en ambos laboratorios están fuertemente anti correlacionados.

G. El experimento según las teorías realistas locales.

Pensemos de que manera describiría esta situación experimental una teoría realista local. En primer lugar, cualquier teoría de este tipo debe aceptar que antes de que el experimentador que trabaja en el Labo-1 decida que propiedad medirá, el resultado de dicha medición debe tener existencia real en la partícula 1. Esto es así porque las tres propiedades que el experimentador puede medir (que denotamos como A , B o C) son “elementos de la realidad”. En efecto, el argumento EPR debería ser suficiente para convencernos de esto: los valores de estas propiedades podrían ser predichos con certeza si hicieramos el experimento adecuado en el Labo-2. Entonces, todas las teorías realistas locales deben aceptar

que cada partícula viaja hacia su detector llevando un conjunto de instrucciones consigo que indican el resultado de cualquier medición. Es tentador utilizar una metáfora biológica: Cada partícula lleva consigo *genes* que determinan los valores de las propiedades A , B , C . Podríamos denotar a estas instrucciones con una terna de números (A, B, C) que indican los valores que se obtendrían si se midiera el valor de alguna de estas tres propiedades. Por ejemplo si la partícula lleva un gen del tipo $(+1, -1, +1)$ quiere decir que si el experimentador decidiera medir A ó C obtendría en ambos casos el valor $+1$ mientras que si midiera B el resultado sería -1 . Es evidente que, como solamente hay dos resultados posibles para la medición de cada una de las tres propiedades, tan solo hay ocho genes posibles para cada partícula. En la siguiente Tabla presentamos la lista exhaustiva de todos ellos:

GENES POSIBLES	
Partícula 1	Partícula 2
$(+1,+1,+1)$	$(-1,-1,-1)$
$(+1,+1,-1)$	$(-1,-1,+1)$
$(+1,-1,+1)$	$(-1,+1,-1)$
$(+1,-1,-1)$	$(-1,+1,+1)$
$(-1,+1,+1)$	$(+1,-1,-1)$
$(-1,+1,-1)$	$(+1,-1,+1)$
$(-1,-1,+1)$	$(+1,+1,-1)$
$(-1,-1,-1)$	$(+1,+1,+1)$

Por otra parte, toda teoría realista local debe aceptar que los genes que lleva la partícula 1 tienen que estar correlacionados con los que lleva la partícula 2. En efecto, esto debe ser así porque si los dos experimentadores decidieran medir la misma propiedad verificarían que obtienen resultados opuestos. Por lo tanto, el gen que lleva la primera partícula determina completamente al gen de la segunda. Por ejemplo, si la primera partícula lleva un gen del tipo $(+1, -1, +1)$ la segunda debe llevar un gen complementario, del tipo $(-1, +1, -1)$.

H. La desigualdad de Bell más sencilla.

El descubrimiento fundamental de Bell es que todas las teorías que aceptan la existencia de genes deben satisfacer ciertas restricciones, que toman la forma de desigualdades matemáticas. Presentaremos aquí la versión mas sencilla de estas desigualdades. Invitamos al lector a realizar un intento por seguir el siguiente razonamiento, que resultará crucial para el resto de nuestro argumento.

Supongamos que la primera partícula lleva el gen $(+1, +1, +1)$. En ese caso la segunda llevará el gen $(-1, -1, -1)$. Entonces, aunque los dos experimentadores midan propiedades distintas los resultados que obtendrán serán siempre opuestos: en el Labo-1 siempre se obtendrá el resultado $+1$ mientras que en el Labo-2 siempre se obtendrá el resultado -1 . Una situación idéntica tiene lugar si el gen que lleva la primera partícula es

$(-1, -1, -1)$ ya que en ese caso también los resultados serán siempre opuestos. Si las partículas fueran generadas únicamente con estos dos tipos de genes entonces deberíamos concluir que los resultados obtenidos en ambos laboratorios serían siempre opuestos. Por supuesto, esta no es una hipótesis razonable ya que no sabemos nada sobre el mecanismo subyacente que produce genes diferentes (esas son, precisamente, las variables ocultas).

Pero, aunque parezca mentira, es posible deducir una propiedad muy sencilla que se debe cumplir para todos los otros genes (o sea, aquellos en los que hay una instrucción que es distinta de las otras dos como es el caso de los genes $(+1, +1, -1)$ y $(+1, -1, +1)$). Es fácil mostrar que para todos esos genes *habrá cinco configuraciones para las cuales los resultados obtenidos en Labo-1 y Labo-2 serán distintos y cuatro configuraciones para las cuales estos resultados serán iguales*. Para ver que esto es cierto es suficiente con hacer un análisis exhaustivo de lo que sucede con cada uno de los genes. Por ejemplo, si el gen que lleva la primera partícula es $(+1, +1, -1)$, tal como está indicado en la Figura 4, los resultados de los experimentos serán opuestos siempre que el primero y segundo experimentador midan respectivamente las propiedades $A_1 - A_2$, $A_1 - B_2$, $B_1 - B_2$, $B_1 - A_2$ y $C_1 - C_2$. En cambio, los resultados serán idénticos siempre que los experimentadores realicen las mediciones de las propiedades $A_1 - C_2$, $B_1 - C_2$, $C_1 - A_2$ y $C_1 - B_2$. El lector puede comprobar que para todos los genes en los que las tres instrucciones no sean idénticas se verifica este mismo resultado: *Siempre hay cinco configuraciones de los detectores para los que los resultados obtenidos en ambos laboratorios son opuestos y hay cuatro para las cuales los resultados son idénticos* (recordemos que si las instrucciones son idénticas entonces los resultados siempre serán distintos). Si los experimentadores eligen al azar las configuraciones de sus detectores entonces podemos concluir que por lo menos en 5 de cada 9 experimentos los resultados serán opuestos!

Esta predicción es totalmente independiente de la naturaleza de las variables ocultas. Esta conclusión es tan importante que merece ser repetida. Para toda teoría realista local prededimos que la probabilidad P_{R-L} de que se obtengan resultados diferentes debe cumplir la siguiente desigualdad:

$$P_{R-L}(\text{Labo-1} \neq \text{Labo-2}) \geq 5/9 = 0.555 \dots \quad (13)$$

I. El experimento según la mecánica cuántica.

La mecánica cuántica también realiza una predicción para el valor de la probabilidad de que se obtengan resultados diferentes en ambos laboratorios. Esta predicción es drásticamente diferente de la de las teorías realistas locales. En efecto, de acuerdo a la mecánica cuántica la probabilidad de obtener resultados distintos es:

$$P_{\text{Cuántica}}(\text{Labo-1} \neq \text{Labo-2}) = 1/2 = 0.5. \quad (14)$$

GEN DE LA PARTICULA 1: (+1,+1,-1)			
Cinco experimentos con resultados distintos		Cuatro experimentos con resultados iguales	
Labo-1	Labo-2	Labo-1	Labo-2
A	A	A	C
B	B	C	A
C	C	B	C
A	B	C	B
B	A		

FIG. 9 Para el gen $(+1, +1, -1)$ hay cinco configuraciones de los detectores que dan lugar a que el resultado registrado en el Labo-1 sea diferente que el registrado en el Labo-2 mientras que hay cuatro configuraciones para las cuales los resultados son idénticos. Esto se repite para todos los genes en los que las tres instrucciones no son iguales.

Para llegar a esta conclusión es necesario utilizar el formalismo matemático de la mecánica cuántica. Sin embargo podemos hacer un intento por explicar su origen de manera sencilla (el lector no interesado está invitado a omitir la lectura de este párrafo). Si realizamos mediciones sucesivas de componentes de un spín de una partícula en direcciones perpendiculares sabemos que, como las proyecciones perpendiculares del spín definen magnitudes complementarias, los resultados de la segunda medición estarán distribuidos al azar con una probabilidad del 50% para cada uno de los dos valores posibles. En cambio, si realizamos mediciones sucesivas en dos direcciones \hat{a} y \hat{b} , que forman un ángulo $\theta_{\hat{a}\hat{b}}$, la mecánica cuántica establece que la probabilidad de que los resultados de ambas mediciones serán iguales es

$$P(B = A) = \cos^2(\theta_{\hat{a}\hat{b}}/2). \quad (15)$$

Si las direcciones \hat{a} y \hat{b} forman un ángulo de 120 grados, como en el caso de la Figura 4, la probabilidad de que los resultados de dos mediciones sucesivas sean iguales es 1/4 (o sea, en el 25% de los casos obtendremos resultados iguales y en el 75% obtendremos resultados distintos³). Con este ingrediente estamos en condiciones de deducir cual es la predicción que la mecánica cuántica realiza para el experimento analizado en las secciones anteriore. Para calcular la probabilidad de que los resultados del Labo-1 sean diferentes de los del Labo-2 tenemos que analizar todos los casos posibles. Presentaremos aquí el estudio de uno de ellos y dejaremos para el lector interesado el examen del resto, que se realiza con un razonamiento similar. Supongamos que en el Labo-1 se midió la propiedad A y se obtuvo el valor $+1$. En ese caso sabemos que si

³ esto se debe a que el coseno de un ángulo de 60 grados es igual a 1/2

midieramos la propiedad A en el Labo-2 obtendríamos con certeza el valor -1 . En consecuencia podemos afirmar que la partícula que se encuentra en el Labo-2 está en el estado de espín -1 en la dirección \hat{a} . Nos interesa calcular en ese caso cual es la probabilidad de obtener el valor -1 para la medición de las componentes \hat{a} , \hat{b} ó \hat{c} . Para eso podemos analizar todos los casos posibles: Si medimos A (lo que ocurre en la tercera parte de los casos) obtendremos el resultado -1 con probabilidad 1. En cambio, si medimos B ó C (lo que ocurre en las restantes dos terceras partes de los casos) podemos apelar al resultado que mencionamos más arriba y afirmar que obtendremos el valor -1 con probabilidad $1/4$. En conclusión si en el Labo-1 se mide $A = +1$ la probabilidad de que los resultados de las mediciones realizadas en el Labo-2 sean distintas resulta ser $\frac{1}{3}(1 + 1/4 + 1/4) = 1/2$, que es justamente el resultado que mencionamos mas arriba. Razonando de igual modo para los restantes resultados posibles para las mediciones realizadas en el Labo-1 llegamos a la misma conclusión y de ese modo demostramos la validez de la predicción cuantica expresada mas arriba.

El contraste entre la predicción cuántica y la predicción de cualquier teoría realista-local es drástico: De acuerdo a la mecánica cuántica en la mitad de los experimentos obtendremos resultados diferentes y en la otra mitad los resultados serán idénticos. Esto es incompatible con la predicción de cualquier teoría realista local ya que de acuerdo a todas ellas los resultados deben ser diferentes por lo menos en el 55.5% de los experimentos. Quién tiene razón: la mecánica cuántica o las teorías realistas locales? Para dirimir este debate, debemos realizar el experimento y comprobar cual de las dos predicciones es la correcta.

J. Otras desigualdades de Bell: CHSH

La desigualdad de Bell que discutimos mas arriba no fue la que Bell expuso en su trabajo sino que es un argumento debido a Mermin, que tiene la virtud de ser extremadamente simple. Sin embargo, no hay ningún experimento que haya detectado la violación de esta desigualdad. Por el contrario, los experimentos realizados han buscado violaciones de otras desigualdades. En particular, una de las mas estudiadas fue introducida pocos años después del trabajo de Bell por cuatro físicos: Clauser, Horn, Shimony y Holt, y se conoce con la sigla CHSH. Es interesante revisar el argumento en que se basa esta desigualdad. Como antes, consideraremos experimentos realizados en laboratorios distantes. En cada laboratorio hay una parte de un sistema compuesto. Es decir: en algún lugar del espacio se genera un par de partículas en un estado tal que las correlaciones entre ellas son fuertes (son aquellas predichas por estados máximamente entrelazados). Cada una de ellas viaja a un laboratorio y en cada uno de ellos se mide uno de dos observables: En el laboratorio 1 se mide la componente del espín a lo largo de la dirección \vec{a} o de la dirección \vec{vecb} .

En el laboratorio 2 se mide la componente del espín a lo largo de las direcciones \vec{c} o \vec{d} . Cada experimentador elige al azar la dirección en que va a medir y la distancia entre los laboratorios (y entre ellos y la fuente donde se producen los pares) es muy grande, de modo tal que no hay posibilidad de conexión causal entre los eventos registrados en los laboratorios 1 y 2.

El mismo argumento que expusimos mas arriba nos lleva a la conclusión de que los resultados de los experimentos realizados en el laboratorio 1 deben existir en ese laboratorio ya que su valor puede ser predicho con certeza si midieramos la misma dirección en el otro laboratorio. Cualquier teoría realista local debe admitir que los valores de estas propiedades están determinados por variables ocultas λ . Por ejemplo, el valor de la proyección del espín en la dirección \vec{a} , al que llamaremos $a_\lambda = \pm 1$, debe ser independiente de lo que mida el observador presente en el laboratorio 2 (de otro modo, deberíamos escribir $a_\lambda(\vec{c})$ o $a_\lambda(\vec{d})$). Como todos estos valores son ± 1 , se verifica siempre la igualdad

$$a_\lambda(c_\lambda + d_\lambda) + b_\lambda(c_\lambda - d_\lambda) = \pm 2.$$

Tomando el módulo de esta expresión podemos escribir

$$|a_\lambda c_\lambda + a_\lambda d_\lambda + b_\lambda c_\lambda - b_\lambda d_\lambda| = 2.$$

Si multiplicamos por la probabilidad $p(\lambda)$, que caracteriza la distribución de variables ocultas λ , integramos sobre λ y usamos la desigualdad triangular (que establece que $|x + y| \leq |x| + |y|$) podemos obtener la desigualdad

$$|K(\vec{a}, \vec{c}) + K(\vec{a}, \vec{d}) + K(\vec{b}, \vec{c}) - K(\vec{b}, \vec{d})| \leq 2,$$

donde las funciones de correlación se definen como el valor medio del producto de los resultados de cada par de experimentos: $K(\vec{a}, \vec{c}) = \langle \vec{a} \cdot \sigma; \vec{c} \cdot \vec{\sigma} \rangle$ (que en una teoría de variables ocultas resultan ser $K(\vec{a}, \vec{c}) = \int d\lambda a_\lambda c_\lambda$). Esta es la famosa desigualdad CHSH, que debe satisfacerse para toda teoría realista local, puede violarse de acuerdo a la mecánica cuántica.

En efecto, de acuerdo a la mecánica cuántica, la función de correlación resulta ser $K(\vec{a}, \vec{c}) = -\vec{a} \cdot \vec{c}$. Podemos ver que es posible violar esta desigualdad si elegimos los vectores \vec{a} , \vec{c} , \vec{b} y \vec{d} formando un ángulo θ entre ellos (en ese orden). Entonces, la combinación de funciones de correlación que aparece resulta ser

$$|K(\vec{a}, \vec{c}) + K(\vec{a}, \vec{d}) + K(\vec{b}, \vec{c}) - K(\vec{b}, \vec{d})| = |big|3 \cos \theta - \cos 3\theta|.$$

Eligiendo $\theta = \pi/4$ entonces resulta ser

$$|K(\vec{a}, \vec{c}) + K(\vec{a}, \vec{d}) + K(\vec{b}, \vec{c}) - K(\vec{b}, \vec{d})| = 2\sqrt{2},$$

que claramente es mayor que 2. Es posible demostrar que esta es la máxima violación admitida por la mecánica cuántica (esta es la "cota de Cirelson").

K. La violación de las desigualdades de Bell

Después de los trabajos de Bell varios grupos se lanzaron a realizar experimentos como los descritos en la sección anterior. Cabe aclarar que ninguno de estos grupos lo hizo con la esperanza de detectar violaciones a las predicciones cuánticas. Por el contrario, a esa altura del siglo XX nadie dudaba que la mecánica cuántica saldría airoso en su confrontación contra las teorías de variables ocultas. Para poder realizar estos experimentos fue necesario superar varios obstáculos tecnológicos y los primeros resultados en los que se detectaron claras violaciones a las desigualdades de Bell fueron obtenidos recién en 1982 por Alain Aspect en París.

El experimento de Aspect fue un verdadero *tour de force* por el que debería hacerse acreedor al premio Nobel de física. Fue realizado utilizando pares de fotones entrelazados generados a partir del decaimiento de átomos de Calcio. Cuando este tipo de átomo decae en una cascada $S-P-S$ emite dos fotones que tienen casi la misma frecuencia y que están entrelazados en su polarización. Este grado de libertad de los fotones se comporta de manera muy similar al espín de una partícula de espín $1/2$. Para realizar su experimento Aspect no solamente tuvo que perfeccionar su fuente de pares de fotones entrelazados (que para esa época eran toda una novedad). Una vez producidos cada uno de los fotones se dirigía hacia un extremo distinto del laboratorio donde se habían montado dos estaciones de trabajo idénticas que jugaban el rol del Labo-1 y el Labo-2 que mencionamos mas arriba. Estas estaciones constaban de un detector que cumplía el papel del instrumento de medición que ilustramos en la Figura 3. En el experimento, en cada estación de trabajo los fotones se encontraban con un espejo que cambiaba de orientación de manera azarosa. Para cada una de estas direcciones los fotones eran enviados a detectores diferentes en los que se medía la polarización en alguna dirección (las que juegan un papel equivalente a las direcciones \hat{a} , \hat{b} o \hat{c} de la Figura 3). Aspect invirtió un esfuerzo considerable para asegurarse de que los espejos variaran su orientación suficientemente rápido y que los detectores estuvieran suficientemente separados como para poder garantizar que no existía conexión causal posible entre los registros tomados en ambos extremos del laboratorio. La longitud del laboratorio era de alrededor de 10 metros y los espejos cambiaban de posición en tiempos del orden de varios nano-segundos (hay que recordar que la luz recorre una distancia de casi treinta centímetros en un nano-segundo).

Los resultados de los experimentos de Aspect fueron concluyentes para la mayoría de los físicos, que por otra parte no dudaban sobre la validez de la mecánica cuántica. Sin embargo, un núcleo de escépticos continuó intentando producir experimentos todavía mas concluyentes. Para ellos, los resultados de Aspect podían ser criticados desde distintos ángulos. Por cierto, teniendo en cuenta las implicancias fundamentales del resultado del experimento, se justifica tener una actitud que en otro

contexto podría ser calificada de exageradamente conservadora. Los problemas del experimento de Aspect eran fundamentalmente dos: Por un lado los ángulos de los espejos no variaban de manera totalmente aleatoria y por lo tanto era posible imaginar algún mecanismo (inverosímil pero imaginable) por el cual los fotones pudieran “conspirar” para que el experimento pareciera favorecer a la mecánica cuántica aún cuando la teoría subyacente fuera realista local. Por otra parte el tiempo de respuesta de los detectores era demasiado largo lo cual traía aparejadas limitaciones en la sincronización de eventos (el tiempo de respuesta y el tiempo característico de la emisión en cascada era comparable). Por otra parte, la baja eficiencia de los detectores originaba otro problema potencial: No todos los eventos son registrados y no hay manera de garantizar que el subconjunto de eventos que dan lugar a la señal medida sea una muestra no-sezgada del total. Si bien parece completamente razonable aceptar que esto es cierto, en el contexto de este experimento aún este tipo de suposiciones “razonables” son puestas en discusión. Debido a esta, y a muchos otros cuestionamientos mas técnicos, durante las últimas dos décadas del siglo XX se realizaron muchos otros experimentos para testear la violación de las desigualdades de Bell.

En la actualidad las técnicas disponibles para generar pares de fotones entrelazados han avanzado notablemente. Los métodos mas modernos utilizan un fenómeno que se conoce como *conversión paramétrica inversa*. Este fenómeno se observa cuando ciertos cristales son iluminados con un laser intenso. Para ciertos cristales no-lineales se produce el proceso de conversión de un fotón del laser en un par de fotones que tienen frecuencias cercanas (en este proceso se conserva la energía y por lo tanto la suma de las frecuencias de los fotones emitidos es igual a la frecuencia del laser incidente). El par de fotones resulta estar entrelazado en su polarización. Los fotones generados de este modo han sido utilizados para realizar un gran número de experimentos en los que se demuestra la violación de desigualdades de Bell. Los experimentos actuales involucran distancias mucho mayores que las usadas en el experimento de Aspect. En 2001 el grupo dirigido por Anton Zeilinger en Innsbruck presentó resultados de un notable experimento donde se detectaban violaciones a desigualdades de Bell con fotones que recorrían varios centenares de metros antes de ser detectados). Poco después, Nicolas Gisin detectó señales claras de violaciones a las desigualdades de Bell en experimentos donde los fotones viajaban decenas de kilómetros (desplazándose por fibras ópticas que corren bajo la superficie del lago de Ginebra). En la actualidad, la existencia de violaciones a las desigualdades de Bell es un hecho que goza de un abrumador consenso a partir de la acumulación de una enorme cantidad de resultados experimentales.

L. El entrelazamiento como un recurso físico

El entrelazamiento es una propiedad de la mecánica cuántica que fue reconocida desde sus primeros años. Por ejemplo, es bien sabido que para construir un modelo razonable del átomo de Helio es necesario aceptar que los spines de sus dos electrones están entrelazados. En efecto, los estados entrelazados en sistemas de dos spines surgen muy naturalmente y juegan un rol muy importante en muchos fenómenos de la física atómica y molecular. Ningún físico medianamente informado consideraría al entrelazamiento como una propiedad exótica de la física cuántica. Sin embargo, el tipo de entrelazamiento al que la mayoría de los físicos está acostumbrado es aquel que se produce entre las partes de sistemas microscópicos. En ese contexto los consecuencias paradójicas de este fenómeno no se ponen de manifiesto. Pero es evidente que, tal como fue analizado en el trabajo de EPR, cuando el entrelazamiento está presente a escala macroscópica es responsable de buena parte de los misterios de la física cuántica.

Desde hace mucho tiempo que somos concientes de la utilidad de almacenar energía, por ejemplo en una batería. Una vez almacenada es posible utilizarla para prender una lámpara, mover un motor, etc. En definitiva, sabemos que la energía almacenada es útil para realizar trabajo. Sólo recientemente se llegó a la conclusión de que es posible concebir al entrelazamiento como un recurso físico. La pregunta que surge en este contexto es *cuál es el tipo de tareas que necesitan del entrelazamiento para su ejecución?* Sólo recientemente se comenzó a abordar esta pregunta y se demostró claramente que, al igual que la energía, podríamos almacenar este recurso y utilizarlo para realizar tareas vinculadas con el procesamiento y la transmisión de la información. La exploración de las posibilidades que abre el uso del entrelazamiento como recurso físico es un campo relativamente nuevo y la demora en su desarrollo se debe a que sólo recientemente se comprobó que es posible generar, preservar y manipular pares de objetos entrelazados sobre distancias macroscópicas.

M. Comentarios y metáforas finales

Cuál es la imagen del Universo que nos provee la mecánica cuántica? No responderemos completamente esta pregunta aquí sino que solo resumiremos los ingredientes de esta visión a los que nos hemos referido en este trabajo. La mecánica cuántica postula la existencia de propiedades observables de un objeto que son incompatibles entre sí. Esto es algo novedoso y profundo. Para asimilarlo es necesario cambiar radicalmente nuestra visión de la realidad física. En primer término deberíamos admitir que al hablar de las *propiedades de un objeto* podemos generar cierta confusión. Esta terminología nos induce a pensar en algo que es propio del objeto, que le pertenece solamente a él. Por el con-

trario, la mecánica cuántica establece que aquello a lo que llamamos propiedades (o que más técnicamente denominamos como una “magnitud física observable”) es en realidad un canal mediante el cual el objeto interactúa con el mundo que lo rodea. El legado del principio de complementariedad es que los objetos tienen distintas ventanas con las que se conectan con el resto del Universo y que existen ventanas que no son compatibles entre sí. Aquello que llamamos “posición” o “momento” son en realidad idealizaciones que lo único que expresan son distintos mecanismos de interacción (canales) por los cuales los objetos de la naturaleza pueden afectarse mutuamente. Lo que la mecánica cuántica nos enseña es que hay ciertos mecanismos de interacción que son compatibles entre sí y que, por el contrario, hay otros que no lo son. Cuando un objeto interactúa con el mundo que lo rodea mediante el “canal de posición”, no puede hacerlo mediante el “canal de momento” y viceversa. En definitiva, la mecánica cuántica nos enseña que los objetos tienen distintas caras y que no todas ellas pueden ser vistas al mismo tiempo. La esencia del principio de complementariedad es esa y ese es un hecho fundamental.

Otra de las enseñanzas de la física cuántica es que el acto de medición no es un hecho pasivo. Probablemente este sea uno de los aspectos más controvertidos de la mecánica cuántica. En efecto, la mecánica cuántica coloca al observador en un lugar diferente del que tradicionalmente le otorgaba la física. Anteriormente se pensaba que las perturbaciones inherentes a la observación podían ser minimizadas. Se pensaba que era posible concebir al acto de observar como una acción asimilable a la de *revelar algo que está escrito en el objeto estudiado*. La mecánica cuántica derribó ese paradigma y lo reemplazó por otro en el que el acto de observar es siempre una interacción. Muchas veces se presenta este hecho como una ventana por la cual puede colarse el subjetivismo. Pero la física cuántica no dice eso sino que establece que el proceso de medición no puede dejar de objetivarse. No puede dejar de describirse como una interacción física. Pero claro, la forma en la que la física cuántica combina esto con la existencia de propiedades incompatibles no puede dejar de sorprendernos. En efecto, si interactuamos con un objeto mediante un cierto canal, determinamos el valor de una de sus propiedades y creamos un estado en el los valores de sus caras complementarias están completamente indefinidos. Lo sorprendente y anti-intuitivo es que no es posible concebir a este como un estado de *ignorancia* sobre los valores de las caras complementarias. Por el contrario, debe ser tratado como una superposición de todas ellas. Probablemente la lección cuántica que nos resulte más difícil de digerir siga siendo aquella que sintetiza la frase de Asher Peres: *los experimentos que no se realizan no tienen resultados*.

Por último, las predicciones cuánticas para los sistemas compuestos son ciertamente sorprendentes pero a la luz de lo dicho anteriormente no deberían parecerlo tanto. La mecánica cuántica nos dice que podemos encontrar un conjunto de propiedades globales de un sistema com-

puesto que sean complementarias a todas las propiedades de cualquiera de sus partes. Cuando medimos ese conjunto de propiedades colectiva de un sistema compuesto preparamos al objeto en un estado en el que todas las alternativas de sus facetas complementarias están presentes. Ese es un estado entrelazado en el cual los valores de las propiedades de las partes, que son complementarias con las propiedades medidas, están completamente indefinidos. Es importante destacar que para que este estado mantenga sus propiedades más notables (el entrelazamiento) es vital que permanezca aislado de todo tipo de interacciones con el medio (que típicamente tienen lugar a través de canales locales). Si el objeto permanece aislado y no es afectado por ningún mecanismo que induzca su *decoherencia* entonces seguirá comportándose como un todo. Será un objeto extendido, una unidad no-local, pese a que sus partes se hayan desplazado a lugares distantes. Las manifestaciones del comportamiento cuántico de objetos compuestos cuyas partes entrelazadas están separados por distancias macroscópicas son realmente sorprendentes. El siglo XXI será, sin duda, el siglo donde el estudio, la ingeniería y el aprovechamiento de este tipo de estados dará lugar al desarrollo de novedosas tecnologías cuánticas que, tal vez, contribuyan a que alguna vez la afirmación de Richard Feynman “*nadie entiende la mecánica cuántica*” deje de ser cierta.