Física Teórica II, I-2014, Juan Pablo Paz
Práctica 11: Clebsh-Gordan y Wigner-Eckart

1. Considere una partícula de espín 1/2 en un estado con $l = 1$.

   a) Encuentre el estado con j_{max} y m_{jmax} en términos de los estados $|l, s, m_l, m_s\rangle$.

   b) Use $J_- = L_- + S_-$para generar todos los estados $|j_{max}, m\rangle$.

   c) Use ortonormalidad para encontrar el estado $|j_{max} - 1, j_{max} - 1\rangle$.

   d) Use J_-para generar todos los estados $|j_{max} - 1, m\rangle$.

   e) ¿Cuál es el valor de expectación de L_z en el estado con $j = 1/2$ y $m = 1/2$? ¿Cuál es el valor de expectación de S_z en ese estado?

2. Se quiere describir un sistema de dos partículas de spín 1 de forma conjunta. Exprese todos los autoestados de momento angular del sistema conjunto en función de los autoestados de momento angular de las dos partículas por separado.

$$|j = 1, m = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0, -\rangle, ...$$

   donde +, 0, − representan $m = 1, 0, -1$ respectivamente.

3. Considere dos partículas con espín 1/2. Calcule todos los coeficientes de Clebsh-Gordan por dos caminos diferentes:

   a) Escriba los kets correspondientes a los posibles estados de espín en la base de autoestados de S^2 y S_z total (triplete y singlete)

$$|s = 1, m = 1\rangle, |s = 1, m = -1\rangle, |s = 1, m = 0\rangle, |s = 0, m = 0\rangle,$$

   en función de los kets en la representación $\{m_1, m_2\}$, usando los operadores $S_\pm$ y ortogonalidad.

   b) Escriba la matriz de 4×4 que corresponde a la representación del operador

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

   en la base $\{m_1, m_2\}$. Luego encuentre la matriz unitaria que diagonaliza esta matriz. ¿Puede identificar sus elementos?

4. Incluyendo el acoplamiento espín-órbita, el hamiltoniano electrónico para el átomo de hidrógeno sin campos externos es

$$H = H_0 + \frac{2\mu_B^2}{r^3}\frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{\hbar^2},$$

   donde $H_0 = p^2/2m - e^2/r$, y $\mathbf{S}$ representa el espín del electrón.

   a) Evalúe los conmutadores

$$[H, L^2], [H, S^2], [H, J^2], [H, L_z], [H, S_z], [H, J_z],$$

   donde $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. ¿Cuál es el conjunto más grande de estos operadores (incluyendo H) que conmutan mutuamente?

b) Ahora se enciende un campo magnético externo $\mathbf{B} = B\hat{z}$, de modo que se agrega al hamiltoniano el término

$$H_B = \frac{\mu_B}{\hbar} B(L_z + 2S_z),$$

Para este caso, repita el punto (a).

5. *a*) Evaluar

$$\sum_{m=-j}^{j} |d^{(j)}_{mm'}(\beta)|^2 m$$

para cualquier j (entero o semi–entero). Comprobar en particular la respuesta para $j = 1/2$, utilizando la tabla de matrices de rotación.
<u>Ayuda</u>: $e^{-\frac{i\hat{J}_y\beta}{\hbar}} \hat{J}_z e^{\frac{i\hat{J}_y\beta}{\hbar}} = \hat{J}_x \sin\beta + \hat{J}_z \cos\beta$

b) Probar, para todo j,

$$\sum_{m=-j}^{j} m^2 |d^{(j)}_{m'm}(\beta)|^2 = \frac{1}{2} j(j+1)\sin^2\beta + m'^2 \frac{1}{2}(3\cos^2\beta - 1)$$

6. *a*) Construya un tensor esférico de rango 1 a partir de dos vectores diferentes $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$ y $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$. Dé la función explícita de $T^{(1)}_{\pm 1,0}$ en términos de $U_{x,y,z}$ y $V_{x,y,z}$.

b) Construya el tensor esférico de rango 2 a partir de dos vectores distintos $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$. Dé la expresión de sus cinco componentes $T^{(2)}_{\pm 2,\pm 1,0}$ en función de las componentes de los vectores.

7. Considere un tensor esférico de rango 1 (es decir, un vector)

$$V^{(1)}_{\pm 1} = \mp \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}, \quad V^{(1)}_0 = V_z$$

La matriz de rotación en el eje y para $j = 1$ es:

$$d^{(j=1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta) & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \cos\beta & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta \\ \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta) \end{pmatrix}$$

utilizando esta expersión evalúe

$$\sum_{q'} d^{(1)}_{qq'}(\beta) V^{(1)}_{q'}$$

y muestre que sus resultados son los que esperaría de las propiedades de transformación de $V_{x,y,z}$ ante rotaciones respecto del eje y.

8. *a*) Considere una partícula sin espín ligada a un centro fijo mediante un potencial central. Relacione lo máximo posible los elementos de matriz,

$$\langle n', l', m'|\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)|n, l, m\rangle \quad \text{y} \quad \langle n', l', m'|z|n, l, m\rangle,$$

utilizando únicamente el teorema de Wigner-Eckart. Esté seguro de establecer correctamente qué elementos de matriz son no nulos.

   b) Repita el punto (a) usando funciones de onda $\Phi(x) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi)$.

9. *a*) Escriba xy, xz y $(x^2 - y^2)$ como componentes de un tensor esférico (irreducible) de rango 2.

   b) El valor de expectación

$$Q = e\langle \alpha, j, m = j \left| \left(3z^2 - r^2\right) \right| \alpha, j, m = j\rangle$$

es conocido como el momento cuadrupolar. Evalúe

$$e\langle \alpha, j, m'|(x^2 - y^2)|\alpha, j, m = j\rangle$$

(donde $m' = j, j-1, j-2, \ldots$) en función de Q y los coeficientes de Clebsch-Gordan apropiados.

10. Un núcleo de espín 3/2 situado en el origen es sometido a un campo eléctrico inhomogéneo. La interacción eléctrica cuadrupolar básica se puede tomar como :

$$H_int = \frac{eQ}{2s(s-1)\hbar^2}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 S_x^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 S_y^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 S_z^2\right]$$

donde ϕ es el potencial electrostático que satisface la ecuación de Laplace, y los ejes de coordenadas se eligen de manera que

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)_0$$

Muestre que la energía de interacción puede ser escrita como

$$A(3S_z^2 - S^2) + B(S_+^2 + S_-^2),$$

y exprese A y B en función de $\partial^2\phi/\partial x^2$ y demás derivadas parciales. Determine los autoestados de energía (en términos de $|m\rangle$, donde $m = \pm 3/2, \pm 1/2$) y los correspondientes autovalores. ¿Hay alguna degeneración?