Física Teórica II, I-2014, Juan Pablo Paz
Práctica 15: Partículas Idénticas

1. *a*) N partículas idénticas de espín 1/2 están sometidas a un potencial de oscilador armónico unidimensional. ¿Cuál es la energía del estado fundamental?

   b) Suponga $N = 2$. Escriba el vector de estado del sistema correspondiente al estado fundamental. ¿Existe alguna restricción para el valor del espín total del sistema? Interprete físicamente.

2. Dos partículas distinguibles de espín 3/2 sin impulso angular orbital pueden acoplarse a $J = 3$, $J = 2$, $J = 1$ o $J = 0$. Suponga ahora que las partículas son idénticas. ¿Qué restricciones se obtienen?

3. Demuestre que dos fermiones idénticos en una misma órbita j, sólo se pueden acoplar a impulso total J par. Use la antisimetría de la función de onda, o sea $\phi(j^2, m, m') = -\phi(j^2, m', m)$ y la propiedad de los Clebsch-Gordan

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | JM \rangle .$$

4. Demuestre que dos bosones con un mismo impulso angular l, sólo se pueden acoplar a impulso total L par. Use la simetría de la función de onda, o sea $\phi(l^2, m, m') = \phi(l^2, m', m)$ y la propiedad de los Clebsch-Gordan

$$\langle l_1 m_1 l_2 m_2 | LM \rangle = (-1)^{l_1+l_2-L} \langle l_2 m_2 l_1 m_1 | LM \rangle .$$

   Indique similitudes y diferencias con el caso de dos fermiones idénticos de espín 1/2.

5. Construya los posibles estados de varias partículas en cada uno de los siguientes casos:

   a) 2 bosones de espín 1.

   b) 3 bosones de espín 1.

   c) 2 fermiones de espín 7/2.

6. Tres partículas idénticas de espín 0 están situadas en los vértices de un triángulo equilatero. El eje z es perpendicular al plano del triángulo y pasa por su centro. Todo el sistema puede rotar libremente alrededor de dicho eje. Obtenga restricciones para los valores posibles de J_z.

7. Considere tres partículas idénticas de espín 1 que interactúan débilmente.

   a) Suponga que se sabe que la parte espacial del vector de estado es simétrico respecto del intercambio de cualquier par de partículas. Utilizando la notación $|+\rangle|0\rangle|+\rangle$ para el caso en que la partícula 1 está en $m_s = 1$, la partícula 2 en $m_s = 0$ y la partícula 3 en $m_s = 1$, construya los estados de espín normalizados en los siguientes tres casos:

      i) Las tres partículas en el estado $|+\rangle$.

      ii) Dos de ellas en $|+\rangle$, la otra en $|0\rangle$.

      iii) Las tres en diferentes estados de espín.
      ¿Cuál es el espín total en cada caso?

b) Trate de resolver el mismo problema cuando la parte espacial es antisimétrica ante el intercambio de cualquier par de partículas.

8. Dos fermiones idénticos de espín 1/2 se mueven en una dimensión bajo el efecto de un potencial de pozo infinito

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{para } x < 0, x > L \\ 0 & \text{para } 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

a) Escriba la función de onda y la energía del estado fundamental cuando las dos partículas se encuentran en un triplete de espín.

b) Repita (a) cuando las partículas se encuentran en el singlete de espín.

c) Suponga ahora que las partículas interactúan mutuamente mediante un potencial de corto alcance que puede ser aproximado por:

$$V = -\lambda\delta(x_1 - x_2),$$

con $\lambda > 0$. Asumiendo que la teoría de perturbaciones es válida para este potencial, discuta qué pasa con los niveles de energía obtenidos en a) y b).