

Física Teórica II, 1-2015

Práctica 3: Postulados

1. Considere un sistema de spin 1 (con un espacio de estados de dimensión 3) y los siguientes operadores

$$L_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Verifique que los autovalores del operador L_j ($j = x, y, z$) son $m_j = 1, 0, -1$ (en unidades de \hbar). Diga cuales son los correspondientes autovectores). Demuestre que estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación $[L_j, L_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}L_l$. Diga si todos o alguno de estos operadores forman un CCOC.
- b) Suponga que tiene a su disposición tres tipos de aparatos de Stern Gerlach que separan un haz entrante en tres haces cada uno correspondiendo a los autovalores de m_x, m_y y m_z . Discuta como utilizar estos aparatos para medir L_x, L_y o L_z .
- c) Suponga que prepara un estado con $m_x = 0$ y mide L_z , cuales son los valores posibles y cuales son sus probabilidades. Qué sucede si a continuación mide L_x nuevamente? (cuales son los resultados posibles y cuales sus probabilidades).
2. Considere el mismo sistema que en el problema anterior y calcule los operadores L_x^2, L_y^2 y L_z^2 .

- a) Diga cuales son sus autovalores y autovectores. Demuestre que estos operadores forman un CCOC. Cuál es la base común de autovectores?
- b) Suponga que prepara un estado con $m_x = 0$ y mide L_z^2 . Cuales son los valores posibles y sus probabilidades? Que sucede si el estado inicial es tal que $m_y = 0$? y si es $m_z = 1$?
- c) Discuta cómo se puede hacer para medir simultaneamente los tres operadores L_x^2, L_y^2 y L_z^2 . Diseñe un instrumento que mida estos operadores usando los aparatos de Stern Gerlach que separan el haz de acuerdo a los valores de L_j (recuerde que el proceso de separación de un haz en tres, que es efectuado aplicando un campo magnético apropiado, puede ser revertido totalmente).
3. En el laboratorio A se preparan partículas de espín 1/2 en uno de dos estados: el estado $|\phi\rangle$, que es autoestado de $\vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ con autovalor +1 y el estado $|\psi\rangle$, que es autoestado de $\vec{b} \cdot \vec{\sigma}$ con autovalor +1 (ambos estados son preparados con igual probabilidad). Las partículas son enviadas al laboratorio B (de modo tal que su estado no cambia durante el viaje desde A hasta B). Cada vez que recibe una partícula, un observador desea distinguir si se trata del $|\phi\rangle$ o de $|\psi\rangle$. Discuta si existe una estrategia posible para cumplir con esta tarea, para vectores \vec{a} y \vec{b} arbitrarios. Suponga que B se conforma con distinguir los estados con una cierta probabilidad midiendo $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$: si obtiene +1 lo asocia con el estado $|\phi\rangle$ y si obtiene -1, con el estado $|\psi\rangle$. Se define la probabilidad de éxito por la probabilidad de: medir +1 y que la partícula esté en $|\phi\rangle$ ó medir -1 y que la partícula esté en $|\psi\rangle$. ¿Cual es la estrategia que debe seguir para maximizar la probabilidad de éxito?. Demuestre que la máxima probabilidad éxito es $P_{max} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 - \vec{a} \cdot \vec{b})})$. Interprete el resultado.

4. El observador A envía partículas de espín $1/2$ hacia el laboratorio donde se encuentra el observador B . Las partículas son preparadas eligiendo al azar entre autoestados de S_x o de S_z . Suponga que los estados no se modifican durante el viaje desde A hasta B . El observador en el laboratorio B elige al azar entre medir S_x o medir S_z . Suponga que A y B repiten muchas veces este procedimiento. Ambos anotan en un cuaderno de laboratorio cual fue el estado preparado (A) y cual fue el estado medido (B).
- ¿Cual es la probabilidad de que los resultados de A y B coincidan? (o sea, ¿cual es la probabilidad de que en un dado renglón de sus cuadernos A y B tengan anotado el mismo resultado?).
 - Suponga que una vez repetido este procedimiento muchas veces, A anuncia públicamente, para cada evento, si el estado enviado era autoestado de S_z o de S_x . ¿Cual es la probabilidad de que los resultados de A y B coincidan si B midió el mismo observable preparado por A ? ¿Y si midió un observable distinto? Si A y B tienen por objetivo compartir una secuencia aleatoria de bits. Pueden usar este procedimiento para lograrlo?
 - ¿Pueden A y B estar seguros de que esa secuencia es conocida sólo por ellos? Discuta qué sucede si hay un observador que intercepta las partículas cuando van desde A hacia B . ¿Pueden A y B descubrirlo?
 - Interesados en el uso de estas ideas para distribución cuántica de claves pueden leer el trabajo de C. Bennett y G. Brassard.
<http://materias.df.uba.ar/ft2a2014c1/files/2014/03/BB84.pdf>

5. Considere una situación como la del problema anterior con la siguiente diferencia: El observador A envía partículas de espín $1/2$ preparadas eligiendo al azar entre autoestados de autovalor $+1$ de S_x o de S_z (¿cómo puede hacer esto?). El observador B elige al azar entre medir S_x o S_z . ¿Cual es la probabilidad de que B pueda descubrir cual es el estado que A le envió? Explique en que casos eso es posible. Suponga que luego de repetir esto muchas veces, B anuncia públicamente en que eventos ha identificado el estado enviado por A . ¿Pueden A y B usar este esquema para compartir una secuencia aleatoria de bits? ¿Cómo deben proceder? (Opcional: ¿que pasa si hay un observador que intercepta los espines que van desde A hacia B ?). Este protocolo fue propuesto por C. Bennett en Phys. Rev. Lett, **68** 3121 (1992).
<http://materias.df.uba.ar/ft2a2014c1/files/2014/03/bennett92.pdf>

6. Demostrar la desigualdad de Schwarz, que dice que si $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son dos vectores arbitrarios en el mismo espacio vectorial, entonces

$$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle\geq|\langle\alpha|\beta\rangle|^2,$$

y la igualdad sólo se produce si estos vectores son proporcionales. (Se hace en la teórica).

7. (Se hace en la teórica, usar notación $(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$) Para dos observables \hat{A} y \hat{B} y un estado cualquiera, pruebe la desigualdad de Heisenberg generalizada (también llamado principio de indeterminación o incertidumbre) establece que

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2\geq\frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2+K^2(A,B),$$

donde: $(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ y $K(A, B) = \frac{1}{2}\langle\{A, B\}\rangle - \langle A \rangle\langle B \rangle$.

8. Verifique que la función de onda de un paquete gaussiano, dada por

$$\langle x'|\alpha\rangle = (2\pi d^2)^{-1/4} \exp \left[\frac{i\langle p\rangle x'}{\hbar} - \frac{(x' - \langle x\rangle)^2}{4d^2} \right]$$

satisface la relación de incerteza mínima

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}.$$

Muestre que también se cumple la condición $\langle x'|(x - \langle x\rangle)|\alpha\rangle = c \langle x'|p - \langle p\rangle|\alpha\rangle$, donde c es un número imaginario.

9. Demuestre que el paquete de onda Gaussiano del problema anterior es el único estado que satisface la condición $\Delta x \Delta p = \hbar/2$.
10. Analice las implicancias del Principio de Indeterminación para el caso de un sistema de espín 1/2.

a) Demuestre que para un estado cualquiera se verifica que

$$(\Delta S_j)^2 = \frac{\hbar^2}{4}(1 - \langle \sigma_j \rangle^2) \quad \text{y} \quad K(S_j, S_k) = \frac{\hbar^2}{4}(\delta_{j,k} - \langle \sigma_j \rangle \langle \sigma_k \rangle). \quad (1)$$

- b) Demuestre que el principio de indeterminación generalizado se deduce que $\sum_j \langle \sigma_j \rangle^2 \leq 1$. ¿Existe algún estado $|\psi\rangle$ que no satisface la igualdad?
- c) Utilice los resultados anteriores para demostrar que si el estado satisface $\Delta S_j = 0$ entonces: $\langle S_k \rangle = 0$ para $j \neq k$ y $K(S_j, S_k) = 0$, para todo k .
- d) Demuestre que para cualquier estado $|\psi\rangle$ de un sistema de espín 1/2 existe algún λ complejo tal que se cumple la condición: $(\sigma_x - \langle \sigma_x \rangle)|\psi\rangle = \lambda(\sigma_y - \langle \sigma_y \rangle)|\psi\rangle$. Encuentre λ para el estado mas general.
11. Represente el estado de un sistema de espín 1/2 como un vector en una esfera unitaria donde las coordenadas son $x_j = \langle \sigma_j \rangle$. (Se hace en la teórica). Interprete geoméricamente la relación de incertidumbre generalizada. ¿Cuál es el significado geométrico de las dispersiones $\Delta \sigma_j$?
12. Evalúe $\Delta x \Delta p$ para cualquiera de los autoestados del Hamiltoniano de una partícula confinada en un pozo unidimensional

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$