Física Teórica II, 1-2015
Práctica 5: Transformaciones

1. En el ejercicio 3 de la guía 1 se obtuvo el operador $R(\theta)$ que rota en θ el estado de polarización lineal de un fotón:

   a) Probar que $R(\theta) = \exp(\frac{-i\Sigma\theta}{\hbar})$, exprese el operador hermítico Σ en la base $\{|x\rangle,|y\rangle\}$.

   b) Pruebe que el operador Σ es diagonal en la base $\{|R\rangle,|L\rangle\}$, con autovalores $\pm\hbar$. Interprete en término del momento angular del fotón a lo largo de la dirección de propagación.

2. a) Obtenga $R(\theta,\hat{n}_\theta)$ el operador de rotación en el espacio de espín 1/2 definido por

   $$R(\theta,\hat{n}_\theta)\,|S_z,+\rangle = |S_n,+\rangle\,, \qquad R(\theta,\hat{n}_\theta)\,|S_z,-\rangle = |S_n,-\rangle\,,$$

   esto es: transforma $|S_z,+\rangle$ (autoestado de S_z con autovalor $\hbar/2$) en $|S_n,+\rangle$ (autoestado de $S_n = \vec{S}\cdot\hat{n}$ con el mismo autovalor). El ángulo de rotación es θ y el eje de rotación $\hat{n}_\theta = -sin(\phi)\hat{x} + cos(\phi)\hat{y}$ siendo θ y ϕ las coordenadas esféricas de la dirección $\hat{n}$.

   b) Demuestre que $R(\theta,\hat{n}_\theta) = \exp(\frac{-i\vec{S}\cdot\hat{n}_\theta\theta}{\hbar})$. Nuevamente el generador de rotaciones es el momento angular cuyos autovalores en el caso de espín 1/2 son $\pm\hbar/2$.

3. Sean las matrices representan los operadores de espín en el espacio de espín 1, en la base en que S_z es diagonal

   $$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}, \quad S_z = \hbar\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

   a) Pruebe que las relaciones de conmutación son idénticas a las correspondientes al caso de espín 1/2.

   b) Pruebe que: $(S_j/\hbar)^3 = S_j/\hbar$ con $j = x, y, z$. Usando el resultado del ejercicio 15 de la guía 2, obtenga una expresión de la matriz de rotaciones en el espacio de espín 1 alrededor de los ejes $\hat{x}_j$: $R(\theta,\hat{x}_j) = \exp(\frac{-iS_j\theta}{\hbar})$.

   c) Particularize para el caso de una rotación alrededor del eje y y obtenga los autoestados de S_x rotando los correspondientes de S_z.

4. Se vió en la teórica que $T(a) = \exp(\frac{-ip_x a}{\hbar})$ es el operador de traslaciones en el espacio, esto es: $T(a)\,|x\rangle = |x+a\rangle$ donde p_x es el operador momento y a un número real. Pruebe que si $\phi(x) = \langle x|\phi\rangle$ entonces $\phi(x-a) = \langle x|\,T(a)\,|\phi\rangle$. Verifique que efectivamente desplaza el estado en a.

5. Sea $|\vec{p}\rangle$ autoestado del operador momento $\vec{p}$ con autovalor $\vec{p}$, cuya función de onda en la representación de posición es $\phi_p(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\vec{p}\rangle$. Considere ahora el estado $\left|\vec{p}'\right\rangle = T(\vec{a})\,|\vec{p}\rangle$ donde $T(\vec{a}) = \exp(\frac{-i\vec{p}\cdot\vec{a}}{\hbar})$ es el operador de traslación.

   a) Pruebe las siguientes relaciones para las funciones de onda en la representación de posición: $\phi_{p'}(\vec{r}) = \exp(\frac{-i\vec{p}\cdot\vec{a}}{\hbar})\phi_p(\vec{r})$ y $\phi_{p'}(\vec{r}) = \phi_p(\vec{r}-\vec{a})$.

b) De las relaciones halladas concluya que: $\phi_p(\vec{r}) = \exp(\frac{i\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar})$ a menos de una constante de normalización.

6. ¿Cuál es el significado físico de $\exp(ixp_0/\hbar)$, donde x es el operador posición y p_0 es algún número con dimensiones de momento? Justifique su respuesta.

7. El operador de desplazamiento en el espacio de fases es una traslación en el espacio en conjunto con otra en el espacio de momentos y se lo puede definir como:
$\mathcal{D}(x_0, p_0) = \exp[-i(x_0 P - p_0 X)/\hbar]$, donde P y X son los operadores momento y posición, respectivamente.

   a) Usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (problema 13 de la práctica 2) compruebe la regla de composición de dos desplazamientos:
   $\mathcal{D}(x_0, p_0)\mathcal{D}(x_1, p_1) = \mathcal{D}(x_0 + x_1, p_0 + p_1)\exp(i\phi)$, determine la fase en función de x_i, p_i.

   b) Compruebe que $Tr\{\mathcal{D}(x_0, p_0) = 2\pi\hbar\delta(x_0)\delta(p_0)$.