Física Teórica II, 1-2015
Práctica 8: Interacción entre átomos y fotones en cavidades

1. Considere el campo electromagnético dentro de una cavidad lineal (y que almacena un único modo) de frecuencia ω_C. El Hamiltoniano del campo puede aproximarse como $H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$.

   a) Exprese el operador de campo eléctrico E como función de los operadores de creación y destrucción de fotones.

   b) Considere los siguientes estados iniciales: (i) $|\Psi(0)\rangle = |n\rangle$, (ii) $|\Psi(0)\rangle = |\lambda\rangle$ (donde $|\lambda\rangle$ es un estado coherente). En ambos casos, encuentre los valores medios del campo E y la dispersión ΔE en función del tiempo.

2. Considere una cavidad mono-modo de frecuencia ω_C que se encuentra inicialmente en su estado $|0\rangle$ (sin fotones). La cavidad se acopla con una fuente de ondas electromagnéticas (clásicas) que oscilan con una frecuencia ω_F. El acoplamiento entre la fuente y la cavidad, $H'_F = -\vec{A} \cdot \vec{J}(t) = 2\hbar\Omega(a + a^\dagger)\cos(\omega_F t)$ puede modelarse en la aproximación de onda rotante (sin términos de alta frecuencia) por $H_F = \hbar\Omega(ae^{i\omega_F t} + a^\dagger e^{-i\omega_F t})$.

   a) ¿Qué diferencia hay entre H'_F y H_F?. *Ayuda:* compare la dependencia temporal de los distintos términos en la representación de interacción.

   b) Encuentre cuál es el estado cuántico del campo dentro de la cavidad después de un tiempo t. Use para este fin la ecuación de Heisenberg para el operador de destrucción a (discuta por separado los casos $\omega_C \neq \omega_F$ y $\omega_C = \omega_F$). ¿Podría ser este un buen método para preparar un estado coherente dentro de la cavidad?

   c) Si en el instante t se mide el número de fotones dentro de la cavidad, ¿cuál es la distribución de probabilidad de los resultados posibles?

3. Revisión del átomo de Ruherford. Basándose en la relación de cuantización de la longitud de onda de de Broglie $n\lambda_{DB} = 2\pi r_{_R}$ ($\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$, $r_{_R}$: radio de la órbita del estado de Rydberg con nivel n y p: momento del electrón).

   a) Usando el teorema del virial: $|E| = T = \frac{1}{2}|V|$, que relaciona los valores medios de la energía E, del potencia V y de la energía cinética T; derive la fórmula de las energías de los niveles de Rydberg: $|E| = \frac{1}{2n^2}mc^2\alpha^2$ (m: masa del electrón, c: velocidad de la luz y α: constante de estructura fina). Exprese α y muestre que vale $1/137$.

   b) Obtenga una expresión del radio de las órbitas $r_{_R}$ en el en término del radio de Bohr a_0 para un dado nivel n. Calcule a_0.

   c) Estime la dependencia con n del tiempo de vida radiativo T_R del nivel n. Para ello aproxime la potencia radiada usando $P_R = \frac{\hbar\omega_{n,n-1}}{T_R} \sim (\omega^2_{n,n-1} r_{_R})^2$.

4. El modelo de Jaynes-Cummings (se hace en parte en la teórica, pero es importante que repita el cálculo por su cuenta). Considere un átomo de dos niveles $|g\rangle$ y $|e\rangle$ cuyo Hamiltoniano puede aproximarse como $H_A = \frac{\hbar\omega_A}{2}(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)$, siendo $\hbar\omega_A = E_e - E_g$. El átomo interactúa con un único modo del campo electromagnético cuantizado al interior de una cavidad, cuyo Hamiltoniano es $H_C = \hbar\omega_C(a^\dagger a + 1/2)$, donde $a^\dagger$ y a son operadores de creación y destrucción de fotones. La interacción entre el dipolo eléctrico del átomo y el campo en la cavidad está descripta por una interacción de la forma $H_{int} = -\vec{d} \cdot \vec{E}$.

Esta interacción puede aproximarse usando la denominada aproximación de onda rotante (rotating wave approximation): $H_{rwa} = -i\frac{\hbar\Omega_0}{2}(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger)$ de modo que uno tiene para el sistema el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings:
$H_{JC} = H_A + H_C + H_{rwa} = \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z + \hbar\omega_C a^\dagger a - i\frac{\hbar\Omega_0}{2}(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger)$ (donde $\sigma_- = \sigma_+^\dagger = |g\rangle\langle e|$).

a) Discuta bajo que condiciones la interacción entre el átomo y el campo puede aproximarse por H_{rwa}.

b) Encuentre los autovectores y autovalores del Hamiltoniano de Jaynes-Cummings. El problema puede resolverse exactamente: i) Demuestre que el estado $|g, 0\rangle$ es el estado fundamental; ii) Demuestre que el Hamiltoniano deja invariantes los subespacios generados por los vectores $|e, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$ para todo valor de $n \geq 0$. iii) Note que entonces el problema a resolver se reduce a un problema de dimensión 2 para cada valor de n.

c) A partir de la solución exacta encuentre los autovalores y autovectores del Hamiltoniano para cada uno de los siguientes casos: i) la frecuencia de Bohr del átomo coincide con la de la cavidad (caso resonante). ii) ambas frecuencias son muy distintas (caso de alta desintonía).

5. Entrelazamiento entre un átomo y el campo en la cavidad (se hace en la teórica): Considere un átomo de dos niveles que interactúa con el campo electromagnético en una cavidad. Suponga que el átomo resuena con la cavidad $\omega_A - \omega_C = 0$.

   a) Encuentre el operador de evolución temporal del sistema átomo- cavidad (analice por separado los subespacios generados por estados de la forma $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$).

   b) Diga cual es la frecuencia con la que oscilan los elementos de matriz del operador de evolución temporal (¿como dependen del número de fotones en la cavidad?).

   c) Suponga que el estado inicial del átomo es $|e\rangle$ y el de la cavidad es $|0\rangle$. Diga cual es el estado del sistema para tiempos posteriores. ¿Para qué tiempos se alcanza el estado $|\Psi_{AC}\rangle = (|e\rangle|0\rangle - |g\rangle|1\rangle)/\sqrt{2}$?

   d) Si la frecuencia de oscilación del sistema átomo-cavidad es Ω_n (debe encontrarla en los puntos anteriores), diga cómo es el operador de evolución temporal para $\Omega_n t = \pi/4$, $\Omega_n t = \pi/2$ y $\Omega_n t = \pi$, denominados pulsos $\pi/2$, $\pi/4$ y π, respectivamente. Diga qué parámetro debe variar en el experimento para alcanzar cada una de estas condiciones.

6. (Se comenta en la teórica) La primera evidencia directa de la existencia de estados con un número entero de fotones fue encontrada por S Haroche y sus colaboradores (`http://materias.df.uba.ar/ft2a2014c1/files/2014/04/PhysRevLett761800.pdf`, `http://materias.df.uba.ar/ft2a2014c1/files/2014/04/PhysToday98_Haroche.pdf`). Considere un átomo de dos niveles que inicialmente es preparado en el estado $|e\rangle$. El átomo atravieza una cavidad en la cual el campo electromagnético está inicialmente en un estado coherente $|\alpha\rangle$ (discuta cómo preparar este estado a partir del estado de vacío $|0\rangle$: revise los ejercicios anteriores). El átomo está en resonancia con la cavidad (o sea, $\omega_A = \omega_C$). El tiempo de tránsito del átomo en la cavidad es t y puede ser controlado (¿cómo?).

   a) Usando los resultados de los ejercicios anteriores, diga cual es el estado del sistema átomo–campo luego de que el átomo atravieza la cavidad.

b) Luego de pasar por la cavidad, se mide la energía del átomo (por un proceso de ionización selectiva, se determina si el átomo está en el estado $|e\rangle$ o en el estado $|g\rangle$. Calcule la probabilidad de detectar al átomo en el estado $|e\rangle$. Analice la dependencia de esta probabilidad con el tiempo de tránsito t y de la amplitud del estado coherente α. Explique el motivo por el cual este resultado es evidencia directa de la existencia de niveles discretos de la energía del campo en la cavidad. Intente reproducir los gráficos presentados en el paper original (Phys. Rev. Lett., 1996).

7. Considere un átomo de dos niveles que pasa por una cavidad que se encuentra vacía (el estado es $|0\rangle$). El átomo está muy fuera de resonancia con la cavidad (o sea $|\Delta| \gg \Omega_0$ con $\Delta = \omega_A - \omega_C$.

   a) Demuestre que si los átomos ingresan en la cavidad en el estado $|e\rangle$ o en el estado $|g\rangle$, salen de la cavidad en el mismo estado.

   b) Calcule el corrimiento de la energía de los estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$ debido a la interacción con el vacío (corrimiento de Lamb). O sea: calcule la diferencia entre la energía del estado $|e, 0\rangle$ y la del estado $|e\rangle$ (y lo mismo para $|g\rangle$).

   c) ¿Qué sucede cuando en la cavidad hay n fotones?

8. ¿Cómo generar entrelazamiento entre dos átomos distantes? Diseñe un procedimiento para preparar el estado entrelazado entre dos átomos (A_1 y A_2): $|\phi_{A_1,A_2}\rangle = (|e_1, g_2\rangle - |g_1, e_2\rangle)/\sqrt{2}$. Para hacerlo tiene a su disposición los siguientes instrumentos: una cavidad ideal (sin pérdidas) por la cual pueden pasar átomos uno tras otro (o sea, los átomos no pueden interactuar directamente pero ambos pueden interactuar con el campo electromagético almacenado en la cavidad). Suponga que los átomos son idénticos y que la frecuencia de la cavidad ω_C es idéntica a la frecuencia de Bohr de los átomos. *Ayuda:* primero genere entrelazamiento entre el primer átomo y el campo electromagnético en la cavidad y luego envíe el segundo átomo en el estado $|g_2\rangle$.

9. ¿Cómo preparar cualquier estado de Bell entre dos átomos? Este es la generalización del problema anterior. Para ello se necesitan tres átomos iguales: un átomo auxiliar (A_1)y dos átomos (A_2 y A_3) para generar el estado de Bell. Utilizaremos una cavidad mono modo ideal y dos aparatos idénticos (R_A y R_B) que pueden aplicar *pulsos* $\pi/4$ a los átomos antes (R_A) y después (R_B) de su pasaje por la cavidad. En estas zonas (zonas de Ramsey) los átomos interactúan con campos de radiofrecuencia (clásicos e intensos). Supondremos que esta interacción es tal que el operador de evolución temporal, que actúa sobre el espacio de estados del átomo que atraviesa la zona de Ramsey es $U_R = \cos(\Omega\Delta t)I - i\sin(\Omega\Delta t)\sigma_y$, con $\Omega\Delta t = \pi/4$, siendo Δt el tiempo de permanencia del átomo en dicha zona.

   Se prepara la cavidad en el estado de vacío $|0\rangle$ y se realizan cuatro experimentos, que llamaremos $e-e$, $e-g$, $g-e$ y $g-g$. En el primero los átomos A_1 y A_2 son preparados en los estados $|e_1\rangle$ y $|e_2\rangle$, etc. En los cuatro experimentos el estado inicial de la cavidad es el vacío $|0\rangle$ y el estado del átomo A_3 es $|g_3\rangle$. Para cada uno de los cuatro experimentos analice en detalle la siguiente secuencia de operaciones y responda en cada paso las preguntas que se hacen (notar que debe obtener una respuesta para cada experimento).

   a) Se hace pasar el átomo A_1 por el aparato R_A. Diga cual es el estado de A_1 a la salida de R_A.

b) Luego se hace pasar el átomo A_1 por la cavidad. La cavidad está sintonizada para resonar con A_1 (la desintonía es $\Delta_1 = \omega_{A_1} - \omega_C = 0$). Diga cual es el mínimo tiempo de interacción tal que el estado final del átomo es $|g_1\rangle$. Diga cuál es el estado del campo en la cavidad luego de la interacción con A_1. ¿Cuál es el estado del átomo A_1?

c) Se envía el segundo átomo A_2 a travez del aparato R_A. Diga cuál es el estado de A_2 al salir de R_A.

d) El átomo A_2 pasa por la cavidad e interactúa con el campo en forma no resonante (dispersiva, con alta desintonía) de modo tal que la diferencia de fase acumulada entre los estados $|e_2\rangle$ y $|g_2\rangle$ es igual a π. Diga cual es el estado del sistema A_2–campo luego de esta interacción.

e) A continuación se hace pasar al átomo A_2 por un aparato R_B. Diga cual es el estado del sistema A_2–campo después de esta etapa.

f) Por último, se prepara un tercer átomo A_3 en su estado $|g_3\rangle$. Se envía ese átomo por la cavidad cavidad de modo tal que la interacción es resonante. El tiempo de interacción es tal que el operador de evolución en esta etapa transforma al estado $|g_3, 1\rangle$ en el estado $|e_3, 0\rangle$. Diga cual es el estado del sistema formado por los átomos A_2, A_3 y el campo. ¿Cuál es el estado del sistema A_2–A_3?. ¿Cuál es el estado del campo en la cavidad?

Verifique que en cada uno de los cuatro experimentos mencionados se prepara un estado de Bell distinto. Diga cual corresponde a cada caso. Discuta (se hace en teóricas) como podría usarse este método para diseñar un aparato que mida en la base de Bell.

10. Entrelazamiento entre dos cavidades: Explique cómo puede prepararse el siguiente estado entrelazado entre dos cavidades (C_1 y C_2): $|\Psi_{C_1,C_2}\rangle = (|0_1, 1_2\rangle + |1_1, 0_2\rangle)/\sqrt{2}$. Para hacerlo puede utilizar un único átomo que puede atravezar ambas cavidades.

11. ¿Cómo detectar un fotón sin absorberlo? Considere una cavidad ideal tal que el estado del campo electromagnético tiene un número de fotones bien definido. Considere un átomo preparado en el estado $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$ (diga cómo crear este estado a partir del estado $|g\rangle$: ¿qué tipo de campo clásico debe aplicar?, en lo que sigue puede suponer que tiene a su disposición suficientes generadores de este tipo de campos, que se pueden aplicar antes y después de que el átomo atraviesa la cavidad). El átomo pasa por la cavidad e interactúa con el campo en la cavidad y luego de salir de ella (y de, eventualmente interactuar con otro campo, si usted lo desea) se mide si el átomo está en el estado $|g\rangle$ o en el estado $|e\rangle$ (con algún detector que funcione utilizando un método de ionización selectiva). Con estos ingredientes, proponga un método para medir el número de fotones almacenados en la cavidad. El método debe cumplir que que luego de la medición el estado del campo en la cavidad siga teniendo n fotones. *Ayuda:* Apele al hecho de que en el régimen de alta desintonía los estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$ del átomo sufren un desfasaje diferente, que depende fuertemente del número de fotones. Piense cómo puede medir ese desfasaje.

12. Teleportación. Se pretende teleportar al Laboratorio B el estado de un sistema de espín 1/2 que se encuentra en el Laboratorio A. Para eso, se dispone de un par de partículas (que denominamos 1 y 2) en un estado entrelazado $|\psi_{1,2}\rangle$. Describa el procedimiento de teleportación para cada uno de los siguientes casos:

    a) $|\psi_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle - |1,0\rangle)$ (se hace en la teórica).

b) $|\psi_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle \pm |1,1\rangle)$.

c) $|\psi_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle \pm i\,|1,1\rangle)$.