

Física Teórica II Práctica 2: Formalismo

Parte I: Espacios de estados de dimensión finita.

1. Considere dos vectores $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ de un espacio vectorial \mathcal{H} . Suponga que el conjunto $B = \{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_N\rangle\}$ es una base de \mathcal{H} y que conoce todos los productos $\langle a_1|\alpha\rangle, \langle a_2|\alpha\rangle, \dots$ y $\langle a_1|\beta\rangle, \langle a_2|\beta\rangle, \dots$
 - a) Encuentre la representación matricial del operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en la base B .
 - b) Para un sistema de espín 1/2 y con $|\alpha\rangle = |0_z\rangle$ y $|\beta\rangle = |0_x\rangle$ (donde los estados $|0_n\rangle$ y $|1_n\rangle$ denotan, respectivamente a los autoestados de $\vec{n} \cdot \vec{S}$ con autovalor $\pm\hbar/2$)
 - 1) Escriba explícitamente la matriz del operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en la base de autoestados de S_z .
 - 2) Transforme esta matriz a la base de autoestados de S_x utilizando la matriz de cambio de base.
2. $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ son dos vectores en un espacio de dimensión 2. Diga cuales condiciones son suficientes, cuáles son necesarias y cuales irrelevantes para asegurar la ortonormalidad de esos vectores:
 - a) $\langle 1|2\rangle = 0$.
 - b) $|\langle 1|x\rangle|^2 + |\langle 2|x\rangle|^2 = 1$.
 - c) $|\langle 1|\phi\rangle|^2 + |\langle 2|\phi\rangle|^2 = 1$ para todo $|\phi\rangle$.
 - d) Existe un $|\phi\rangle$ tal que $\langle 1|\phi\rangle = 0$ y $\langle 2|\phi\rangle = 0$.
 - e) Para todo $|\phi\rangle$ existen constantes a y b tal que $|\phi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$
 - f) Al menos uno de los productos $\langle 1|R\rangle$ y $\langle 2|R\rangle$ es complejo.
3. Suponga que $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son autoestados de algún operador hermítico A . ¿Bajo qué condiciones se puede concluir que $|i\rangle + |j\rangle$ también es autoestado de A ? Justifique.
4. Considere un operador hermítico A , no degenerado cuyos autovalores son a'
 - a) Pruebe que $\prod_{a'}(A - a')$ es el operador nulo.
 - b) ¿Cuál es el significado del operador $\prod_{a'' \neq a'} \frac{(A - a'')}{(a' - a'')}$ para un a' dado?
 - c) Escriba estos dos operadores para el caso de un sistema de espín 1/2 con $A = S_z$
5. Considere el observable A cuya matriz es

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

- a) Encuentre la base ortonormal de autovectores de A y diga cuales son los correspondientes autovalores. ¿Hay degeneración?.
6. Sean A y B dos observables. Suponga que los autovectores comunes de A y B $\{|a', b'\rangle\}$, forman una base ortonormal ¿Se puede siempre concluir que $[A, B] = 0$? Si su respuesta es sí, pruébela; si es no, dé un contraejemplo. (Se hace en la teórica).

7. Sea $|\phi\rangle$ un autoestado de A con autovalor a . Demuestre que si A y B anticonmutan entonces $B|\phi\rangle$ es autoestado de A con autovalor $-a$. En el caso de una sistema de spín $1/2$ aplique este resultado para calcular $S_i|0_j\rangle$ para todo par de direcciones ortogonales $i \neq j$.
8. Considere dos observables A_1 y A_2 que no conmutan entre sí ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero ambos conmutan con el hamiltoniano H ($[A_1, H] = [A_2, H] = 0$). Pruebe que los autoestados de H deben ser degenerados. ¿Hay excepciones? Como ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales $H = p^2/2m + V(r)$, con $A_1 \rightarrow L_z$ y $A_2 \rightarrow L_x$.
9. Considere un sistema físico cuyo espacio de estados tiene una base $B = \{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$. En esta base, las matrices de los operadores \hat{H} y \hat{B} son

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde ω_0 y b son constantes reales.

- a) Diga si \hat{H} y \hat{B} son hermíticos y si estos operadores conmutan. En ese caso, construya una base de autovectores comunes a ambos operadores.
- b) ¿Cuáles de los conjuntos $\{\hat{H}\}$, $\{\hat{B}\}$, $\{\hat{H}, \hat{B}\}$, $\{\hat{H}^2, \hat{B}\}$ son CCOC?
10. Considere operadores A , B y C tales que, ara una base $B = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ cumplen:

$$\begin{aligned} A|u_1\rangle &= |u_1\rangle; A|u_2\rangle = 0; A|u_3\rangle = -|u_3\rangle \\ B|u_1\rangle &= |u_1\rangle; B|u_2\rangle = |u_2\rangle; B|u_3\rangle = |u_3\rangle \\ C|u_1\rangle &= i|u_2\rangle; C|u_2\rangle = -i|u_1\rangle + i|u_3\rangle; C|u_3\rangle = -i|u_2\rangle \\ D|u_1\rangle &= i|u_2\rangle; D|u_2\rangle = i|u_1\rangle + i|u_3\rangle; D|u_3\rangle = -i|u_2\rangle \end{aligned}$$

- a) Diga cual de estos operadores son observables.
- b) Enumeren los CCOC que pueden construirse y digan cuales son sus autoestados comunes.
- c) Dos de estos observables no conmutan. Elija uno y diga qué valores podrían obtenerse al medirlo para un estado cualquiera. Si luego se mide el otro observable, ¿qué valores podrían obtenerse?.
11. Sean A y B , dos operadores que conmutan con $[A, B]$. Demostrar que

$$[A^m, B] = mA^{m-1}[A, B].$$

Use esta propiedad para demostrar que

$$[f(A), B] = \frac{df(A)}{dA}[A, B].$$

12. Considerar los operadores A , L y $A(s)$, siendo s un parámetro real o complejo

$$A(s) \equiv e^{sL} A e^{-sL}.$$

Demostrar:

- a) $\frac{dA(s)}{ds} = [L, A(s)]$
 b) $\frac{d^2A(s)}{ds^2} = [L, [L, A(s)]]$
 c) $\frac{d^3A(s)}{ds^3} = [L, [L, [L, A(s)]]]$

Utilice esto para expandir $\hat{A}(1)$ en una serie de Taylor, y demostrar que

$$e^L A e^{-L} = A + [L, A] + \frac{1}{2!}[L, [L, A]] + \frac{1}{3!}[L, [L, [L, A]]] + \dots$$

13. Sean A y B , dos operadores que conmutan con $[A, B]$. Demostrar que

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]}$$

Ayuda:

- a) Mostrar que $[e^{\eta A}, B] = \eta e^{\eta A} [A, B]$
 b) Definimos $g(\eta) \equiv e^{\eta A} e^{\eta B} e^{-\eta(A+B)}$. Demostrar que la derivada es: $\frac{dg}{d\eta} = \eta [A, B] g$.
 c) Integrar la ecuación anterior.
14. Considere que los operadores B_1, B_2, \dots, B_N son tales que $[B_j, [B_k, B_l]] = 0$ para todos los valores de $j, k, l = 1, \dots, N$ (o sea: cada operador conmuta con el conmutador de cualquier par de operadores). Demuestre que entonces vale la siguiente identidad (puede hacerlo por inducción):

$$\exp(B_1) \exp(B_2) \dots \exp(B_N) = \exp\left(\sum_{j=1}^N B_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^j [B_k, B_j]/2\right)$$

15. a) Considere un operador tal que $A^2 = I$ (dé un ejemplo concreto de un operador de ese tipo). Demuestre que para todo número real o complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha A) = \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha))I + \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))A$$

En particular muestre que: $\exp(-i\alpha A) = \cos \alpha I - i A \sin \alpha$.

- b) Considere un operador B tal que $B^3 = B$ (¿podría encontrar un ejemplo?). Demuestre que para todo número real o complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha B) = f(0)I + \left(\frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha)) - f(0)\right)B^2 + \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))B$$

En particular muestre que:

$$\exp(-i\alpha B) = I + (\cos \alpha - 1)B^2 - i \sin \alpha B$$

16. Usando las reglas del álgebra de bra-ket, pruebe o evalúe los siguientes items:

- a) $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$ y $\text{Tr}(XYZ) = \text{Tr}(ZXY)$, donde X, Y y Z son operadores.
 b) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.
 c) Calcule $\exp[if(A)]$ en forma de ket-bra, donde A es un operador hermítico cuyos autovalores son conocidos.

Parte II: Espacios de dimensión infinita. El caso continuo.

17. a) Considere los siguientes operadores contruidos a partir de la base continua $\{|x\rangle, -\infty \leq x \leq \infty\}$: $P_{I_j} = \int_{x \in I_j} dx |x\rangle\langle x|$ donde I_j es un intervalo del eje real. Calcule los productos $P_{I_j}P_{I_k}$. Indique si los operadores P_{I_j} son proyectores. Indique en que caso vale $P_{I_j}P_{I_k} = 0$. Indique si los operadores $|x\rangle\langle x|$ son proyectores.
- b) Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{n}{2} \exp(-n|x|)$ converge (calcule la norma de la diferencia entre dos elementos consecutivos y demuestre que tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$). ¿Converge a una función?
- c) Suponga que $f(A)$ es una función de un operador hermítico A cuyos autovectores son $|\phi_j\rangle$. Encuentre la matriz de $f(A)$ en otra base $|\tilde{\phi}_k\rangle$ suponiendo que conoce la matriz de cambio de base entre $|\phi_j\rangle$ y $|\tilde{\phi}_k\rangle$.
18. a) Sea x y p_x la coordenada y el momento de una partícula que se mueve en una dimensión. Evalúe el corchete de Poisson clásico $\{x, F(p_x)\}_{PB}$.
- b) Sean ahora x y p_x los correspondientes operadores cuánticos. Evalúe el conmutador $[x, F(p_x)]$ y aplique el resultado para el caso $F(p_x) = \exp(ip_x a/\hbar)$.
- c) Usando el resultado de anterior, demuestre que el estado $|\phi\rangle = \exp(\frac{ip_x a}{\hbar})|x'\rangle$ (con $x|x'\rangle = x'|x'\rangle$) es un autoestado del operador x . ¿Cuál es el correspondiente autovalor?
19. a) Demuestre las igualdades

$$[x_i, F(\mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad [p_i, G(\mathbf{x})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i}$$

para cualquier par de funciones F y G que puedan ser expresadas en serie de potencias de su argumento.

- b) Calcule $[x^2, p^2]$. Compare su resultado con el corchete de Poisson clásico $\{x^2, p^2\}_{PB}$.

20. Pruebe lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle p'|x|\alpha\rangle &= i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \langle p'|\alpha\rangle \\ \langle \beta|x|\alpha\rangle &= \int dp' \psi_\beta^*(p') i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \psi_\alpha(p') \end{aligned}$$

donde $\psi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ y $\psi_\beta(p') = \langle p'|\beta\rangle$ son las funciones de onda en el espacio de momentos.